

Максим Максимов

основи на **ФИЗИКАТА**

част I.

Механика

Термодинамика и молекулна физика

БУЛВЕСТ 2000
София, 2008

Учебникът е одобрен от Факултетния съвет на Физическия факултет на СУ „Св. Климент Охридски“ с Протокол №6 от 14.12.1999 г.

Рецензент: *доц. Димитър Мърваков*

***** – допълнителен материал или задача с повишена трудност

© Максим Христов Максимов, автор, 2000

© Булвест 2000, издател, 2000

4

ISBN 978-954-18-0163-5 (ч.1)

Съдържание

Увод	4
Физични величини и измерителни единици	5

МЕХАНИКА

Глава 1. Кинематика на материална точка

1. Праволинейно движение	10
2. Криволинейно движение	18
3. Движение по окръжност	24

Глава 2. Динамика на материална точка

4. Принципи на механиката	29
5. Видове сили	34
6. Движение в неинерциална отправна система	42
7. Земята като неинерциална отправна система	48
8. Работа и кинетична енергия	54
9. Потенциална енергия	59

Глава 3. Закони за запазване в механиката

10. Закон за запазване на импулса ...	64
11. Закон за запазване на енергията ..	70
12. Превръщане на енергията при живите организми	74
13. Удари	77
14. Закон за запазване на момента на импулса	82

Глава 4. Механика на твърдо тяло

15. Въртене на твърдо тяло около неподвижна ос	89
16. Инерчен момент.	94
17. Плоскопаралелно движение на твърдо тяло. Кинетична енергия ...	98
18. Въртене около неподвижна точка и свободно движение на твърдо тяло	103
19. Жироскопи	108

Глава 5. Еластични свойства на телата

20. Разтягане и свиване на еднородна пръчка	112
21. Еднородни деформации	116

22. Нееднородни деформации	121
23. Еластични свойства на биологичните материали.	125

Глава 6. Механика на флуидите

24. Хидростатика	130
25. Движение на идеален флуид	135
26. Движение на вискозен флуид	141
27. Движение на твърдо тяло във флуид	146

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА

Глава 7. Идеалният газ като най-проста термодинамична система

28. Термодинамично равновесие и температура	153
29. Закони при идеален газ	158
30. Първи принцип на термодинамиката	162
31. Топлинни капацитети. Адиабатен процес	168

Глава 8. Молекулно-кинетична теория на идеалния газ

32. Налягане и температура на идеален газ.....	175
33. Класическа теория на топлинните капацитети.....	179
34. Разпределения на Максвел и на Болцман.....	182
35. Преносни явления.....	188

Глава 9. Втори принцип на термодинамиката

36. Топлинни машини	194
37. Ентропия	200
38. Ентропия и вероятност	204
39. Втори принцип на термодинамиката	206

Глава 10. Реални газове и течности

40. Вандерваалсов газ. Втечняване на газовете	212
41. Фазови преходи	215
42. Уравнение на Клапейрон – Клаузиус. Фазови диаграми	218
43. Повърхностно напрежение	221
Отговори на задачите	226
Приложение	232

Увод

Учебникът „Основи на физиката“ е адресиран към широк кръг читатели – предимно студенти от висшите училища, които изучават физика от един до три семестъра. Той ще бъде полезен и за учениците от средното училище, за които физиката е профилиращ предмет. Курсът е разделен на две части, всяка от които съдържа по два раздела.

Първата част включва:

1. Механика;
 2. Термодинамика и молекулна физика.
- Във втората част разделите са:
1. Електричество и магнетизъм;
 2. Вълни и частици.

Акцентът е поставен върху основните физични идеи, принципи и закономерности, които са изложени достатъчно пълно, логически последователно и са подкрепени с многобройни конкретни примери. Голяма част от примерите са от живата природа, а в някои от тях се разглеждат въпроси, свързани с опазване здравето на човека и околната среда.

Необходимите знания по математика са в рамките на изученото в едносеместриален курс по висша математика и, разбира се, в средното училище. В края на Част I е дадено обширно математическо приложение, в което са систематизирани всички най-важни математически формули и операции, използвани в курса по физика.

Съществена част от курса „Основи на физиката“ са многобройните примери и задачи. Почти всички теми съдържат както задачи с подробни решения (примери), така и голям брой задачи за самостоятел-

на работа, на които в края на учебника са дадени само отговорите. В решенията на част от примерите се съдържат общи указания и алгоритми за решаване на определен тип задачи, които след това могат да се приложат в задачите за самостоятелна работа. В друга част от примерите се доразвиват и конкретизират важни идеи, заложиени в учебното съдържание, или по-детайлно се проследява изводът на определени закономерности, изискващ повече пресмятания.

Тъй като учебникът е предназначен за студенти (и ученици), изучаващи физиката с различен брой часове, включеният в него материал може да се разглежда както цялостно, така и само частично. Например студентите, които изучават физиката само в един семестър, могат да пропуснат голяма част от примерите и задачите, както и отделни теми или части от теми (например значителна част от въпросите, свързани с динамиката на абсолютно твърдо тяло).

Благодарности

Искам да изкажа сърдечна благодарност на Генчо Жилков, Васил Петров, Мария Цонева, Андон Рангелов и Христо Илиев за проверката на включените в учебника задачи и техните решения. Благодаря на всички колеги от Физическия факултет на СУ „Св. Кл. Охридски“, които проявиха интерес към ръкописа и с ценните си забележки и препоръки допринесоха за неговото подобряване. Искрено съм благодарен на ръководството и на сътрудниците на издателство „Булвест 2000“, без чиято подкрепа този проект нямаше да бъде реализиран.

Авторът

Физични величини и измерителни единици

Физична величина се нарича свойство, присъщо на физично явление, тяло, система, вещество или процес, което може да се разграничи качествено и да се оцени количествено.

Означения

Физичните величини се означават с латински или гръцки букви. Скаларните величини се означават със светли курсивни латински букви: m – маса, T – температура, Q – количество топлина и т.н. Когато се използват гръцки букви, те могат да са както курсивни, така и прави (в учебника са използвани прави гръцки букви). Например: ρ – плътност, σ – повърхностно напрежение, η – вискозитет.

Векторните физични величини се означават с прави получерни букви или със стрелка, поставена над символа (в учебника са използвани само прави получерни букви). Например: $\mathbf{v}$ – скорост, $\mathbf{a}$ – ускорение, $\mathbf{F}$ – сила.

Единици

Големината на физична величина се изразява чрез числена стойност и съответна измерителна единица (6 m, 5 s, 3 kg и т.н.). Числената стойност е число, което показва колко пъти измерителната единица се съдържа в измерваната величина. Например твърдението, че дължината на стаята е 6 m означава, че измерителната единица метър се съдържа в измерваната величина дължина 6 пъти.

Измерителните единици на всички физични величини могат да се изразят чрез измерителните единици на малък брой физични величини, условно приети за независими. В механиката за независими се приемат величините дължина ℓ , маса m и време t . Единиците на независимите величини се наричат *основни единици*. В механиката това са единицата за дължина метър (m), единицата за маса килограм (kg) и единицата за време секунда (s). Всички останали физични величини са

функционално свързани с независимите величини и техните измерителни единици се изразяват чрез основните единици. Например скоростта при равномерно движение се изразява с уравнението $v = \ell/t$, т.е. величината скорост е отношение на величините дължина (път) и време. Нейната единица също е отношение на единиците на тези две независими величини: тя е метър в секунда (m/s).

Съвкупността от единици за физични величини, едни от които са приети за независими, а останалите са функционално свързани с тях, се нарича система единици за физични величини. В учебника е използвана Международната система единици, утвърдена от XI генерална конференция по мерки и теглилки през 1960 година. Международното ѝ съкратено означение е SI (от френски *Système International*). Тя се основава на следните седем основни единици:

метър – за дължина;
килограм – за маса;
секунда – за време;
ампер – за големина на електричен ток;
келвин – за термодинамична температура;
мол – за количество вещество;
кандела – за интензитет на светлина.

Определенията на основните единици са дадени в таблица B.1 на стр.237.

Размерност на физичните величини

Площта на правоъгълник със страни $a = 2$ m и $b = 3$ m е $A = ab = (2 \text{ m})(3 \text{ m}) = 6 \text{ m}^2$. Единицата за площ е квадратен метър. Тъй като площта се получава като произведение от две дължини, казва се, че има *размерност* дължина по дължина или дължина на квадрат, която е прието да се означава L^2 . Размерностите на седемте независими величини от SI се означават по следния начин: L (дължина), M (маса), T (време), I (големина на електричен ток), Θ (термодинамична температура), N (количество вещество) и J (интензитет на светлина). Размерностите се разглеждат като алгебрични величини, към които могат да се прилагат операциите умножение, деление и повдигане на степен. Общият вид на размерността (дименсията) на една произволна величина X от SI се определя от израза

$$(1) \quad \dim X = L^a M^b T^c I^d \Theta^e N^f J^g,$$

където $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta$ и ζ са степенните показатели на основните размерности. Те могат да бъдат положителни или отрицателни, цели или дробни числа или нули. Например размерността на скоростта е дължина разделена на време, т.е. $\dim v = L/T$ или $\dim v = LT^{-1}$. (В случая $\alpha = 1, \gamma = -1, \beta = \delta = \epsilon = \eta = \zeta = 0$.)

Могат да се събират (изваждат) само физични величини, които имат еднаква размерност. Във всяко уравнение между физични величини размерността на лявата страна на уравнението трябва да съвпада с размерността на дясната страна на уравнението. Например уравнението

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

изразява закона за пътя при равноускорително движение без начална скорост. От лявата страна на това уравнение е величината път s , която има размерност на дължина (L). От дясната му страна е произведението на ускорението a и квадрата на времето t . Неговата размерност е $(LT^{-2})(T^2) = L$, т.е. двете страни на уравнението имат еднаква размерност – дължина L .

При решаването на физични задачи е полезно да се направи проверка на размерността на полученото в задачата уравнение. Ако размерността на двете му страни не съвпада, това означава, че уравнението е грешно. Например за ускорението на тяло сме получили уравнението $a = v^2/t$. Ускорението има размерност LT^{-2} , докато размерността на дясната страна на това уравнение е $(LT^{-1})^2(T^{-1}) = L^2T^{-3}$. Размерностите на величините от двете страни на уравнението са различни, което показва, че уравнението е грешно. Ще обърнем внимание, че еднаквата размерност на величините от двете страни на едно уравнение е необходимо, но не и достатъчно условие уравнението да е вярно. Уравнение с правилна размерност също може да е грешно и да не изразява действителна физична закономерност.

Анализът на размерността дава възможност не само да се откриват грешки, но и помага при възпроизвеждането по памет на дадена формула, а в някои слу-

чай уравненията, изразяващи физични закономерности, могат да се получат чрез анализ на размерността на влизащите в тях величини. Да допуснем например, че не сме сигурни дали центростремителното ускорение при движение със скорост v по окръжност с радиус r се изразява с уравнението $a = v^2r$ или с уравнението $a = v^2/r$. Отговор на въпроса, кое от двете уравнения е грешно, може да даде проверката на размерността. Едночленът v^2r има размерност $(LT^{-1})^2(L) = L^3T^{-2}$, докато ускорението, което стои от лявата страна на уравнението $a = v^2r$, има размерност LT^{-2} . Следователно двете страни на това уравнение имат различна размерност, което показва, че уравнението е грешно. Вярното уравнение $a = v^2/r$ може да се получи непосредствено от анализа на размерността, ако се знае предварително, че центростремителното ускорение зависи само от скоростта v и от радиуса на окръжността r . Да представим тази зависимост във вида

$$a = v^\alpha r^\beta,$$

където α и β са неизвестни числа, които ще определим от изискването двете страни на уравнението да имат еднаква размерност. За целта съставяме аналогично уравнение между размерностите на величините

$$LT^{-2} = (LT^{-1})^\alpha (L)^\beta \quad \text{или} \quad L^1T^{-2} = L^{\alpha+\beta}T^{-\alpha}.$$

За да бъдат размерностите на двете страни на уравнението еднакви, трябва L и T (които се разглеждат като алгебрични величини) от двете страни на уравнението да са повдигнати съответно на една и съща степен, т.е. трябва $\alpha + \beta = 1$ и $-\alpha = -2$. Следователно $\alpha = 2$ и $\beta = -1$. Уравнението за центростремителното ускорение е $a = v^2r^{-1} = v^2/r$. В случая полученият чрез анализ на размерността резултат е точен. В общия случай анализът на размерността дава възможност да се получи функционалната зависимост между физични величини с точност до числен множител. Например може да се установи, че пътът при равноускорително движение без начална скорост е правопропорционален на ускорението a и на квадрата на времето t . Численият множител $1/2$ в закона за пътя $s =$

$at^2/2$ обаче не може да се получи от анализа на размерността.

Значещи цифри

Стойностите на физичните величини се определят експериментално. Измерената стойност на една величина се различава от истинската ѝ стойност в рамките на експерименталната грешка. Големината на грешката зависи от много фактори: от качеството на използваната апаратура, от уменията на експериментатора, от броя на измерванията и др. Нека например в лабораторен експеримент определяме площта на правоъгълна пластинка като измерваме с линейка дължините на нейните страни. Точността, с която мери линейката, е $\pm 0,1$ cm. Ако за дължината на пластинката сме получили $a = 15,4$ cm, при дадената точност на измерването можем само да твърдим, че истинската стойност на дължината е в интервала от 15,3 cm до 15,5 cm, т.е. $a = (15,4 \pm 0,1)$ cm. В случая казваме, че измерената стойност на дължината a има три значещи цифри. Ако в разглеждания експеримент за широчината b на пластинката сме получили 3,6 cm, това означава, че истинската стойност на b лежи в интервала от 3,5 cm до 3,7 cm, т.е. $b = (3,6 \pm 0,1)$ cm. В случая измерената стойност има две значещи цифри. Обърнете внимание, че и в двата случая грешката е в последната значеща цифра. За да определим площта на пластинката, трябва да умножим получените при измерването стойности на дължините на нейните страни

$$A = ab = (15,4 \text{ cm})(3,6 \text{ cm}) = 55,44 \text{ cm}^2.$$

Не е трудно обаче да се убедим, че представянето на пресметнатата стойност на площта A с число, съдържащо четири значещи цифри, не съответства на точността, с която е определена тази площ. Действително, истинската стойност на площта A лежи в интервала от 54 cm^2 до 57 cm^2 :

$$A_{\min} = (15,3 \text{ cm})(3,5 \text{ cm}) = 53,55 \text{ cm}^2 \approx 54 \text{ cm}^2;$$
$$A_{\max} = (15,5 \text{ cm})(3,7 \text{ cm}) = 57,35 \text{ cm}^2 \approx 57 \text{ cm}^2.$$

Следователно грешката е във втората значеща цифра. В случая тя може да е 4, 5, 6 или 7. След като не можем точно да определим коя е втората значеща цифра (на единиците), очевидно следващите след нея цифри на десетите и стотните не носят ни-

каква информация за истинската стойност на A и затова те не се записват, а пресметнатата стойност на площта A се закръглява до две значещи цифри: $A = 55 \text{ cm}^2$. При такъв запис грешката отново е в последната значеща цифра: *последната значеща цифра винаги носи информация за точността, с която е определена стойността на дадената величина*. Колкото по-голяма е точността, толкова по-голям е и броят на значещите цифри, които са необходими за записване на числената стойност на величината.

При решаването на физични задачи се налага да се умножават и делят или да се събират и изваждат физични величини, които са дадени с различна точност (с различен брой значещи цифри). Тогава се спазват следните правила:

1. При умножаване или делене на няколко величини, броят на значещите цифри на крайния резултат трябва да е равен на броя на значещите цифри на величината, която е определена с най-малка точност, т.е. на величината, чиято числена стойност е записана с най-малък брой значещи цифри.

2. При събиране (изваждане) на няколко величини последната значеща цифра на крайния резултат трябва да има същата позиция в десетичната система на числата, както в събираемото, чиято последна значеща цифра е с най-предна позиция.

Например при събиране на 135 g и 2,25 g крайният резултат трябва да се запише 137 g, а не 137,25 g, защото с най-предна позиция (позиция на единиците) е последната цифра на събираемото 135 g, докато последната цифра на другото събираемо 2,25 g е с две позиции по-назад (в позицията на стотните).

Ще обърнем внимание, че нулите в някои случаи са значещи цифри, а в други случаи не са. Например в числата 0,015 и 0,00018 нулите не са значещи цифри – и двете числа имат само по две значещи цифри. В числата 1,015 и 2,00018 обаче нулите са значещи цифри – първото число има 4 значещи цифри, а второто – 6.

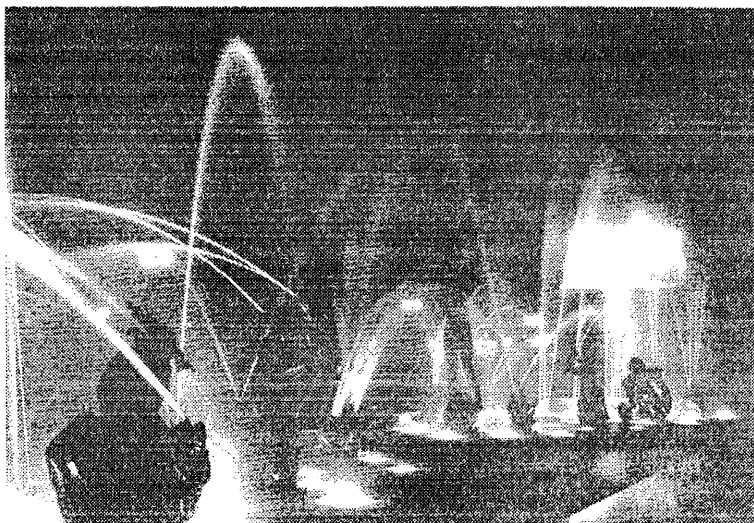
В учебника числените стойности на величините, които се пресмятат в повечето задачи, са дадени с две или с три значещи цифри.

МЕХАНИКА

Механиката е дял от физиката, който изучава движението и взаимодействието на материалните тела. Под механично движение се разбира изменението с течение на времето на взаимното положение на телата (или на техните частици) в пространството. Механиката разглежда такива взаимодействия, които предизвикват промяна в скоростите на движение на телата или деформации. За тази цел се използват опростени модели, отразяващи едни или други съществени свойства на реалните тела. Това са моделите: 1. материална точка – прилага се, когато се изучава постъпателното движение на телата, без да се отчита тяхното въртене; 2. идеално (абсолютно) твърдо тяло – прилага се, когато може да се пренебрегне деформацията на телата; 3. непрекъснатата деформируема среда – прилага се, когато може да се пренебрегне атомно-молекулният строеж на веществото. В зависимост от това, кой от трите модела използва, механиката се разделя на: Механика на материална точка (и на система от материални точки); Механика на идеално твърдо тяло; Механика на непрекъснатите среди (деформируеми твърди тела, течности и газове). Във всеки от тези раздели, в зависимост от характера на решаваните задачи, механиката се разделя на: 1. кинематика – изучава геометричните свойства на движението на телата; 2. динамика – изучава движението на телата под действие на сили; 3. статика – изучава условията за равновесие на телата под действие на сили.

Законите на механиката имат не само голямо практическо приложение, но и важно методологично значение за цялата физика и за останали природни науки. Например законите за запазване на енергията, импулса и момента на импулса, които се въвеждат в механиката, запазват своето фундаментално значение в съвременните физични теории и се прилагат при описване на изключително широк кръг от природни явления и процеси.

Кинематика на материална точка



Кинематиката е част от механиката, която описва геометричните свойства на движението на телата, без да отчита масата на тела и действащите им сили. Ще започнем изучаването на механиката с разглеждането на най-простите видове движения – движението на материална точка по права линия и криволинейното ѝ движение в една равнина. Ще дефинираме основните кинематични характеристики на движението на материална точка (скорост и ускорение) и ще разгледаме кинематичните уравнения на това движение спрямо дадена отправна система.

1. Праволинейно движение

Материална точка

В много случаи при изучаване движение на телата можем да се абстрахираме от техните размери, форма и вътрешна структура и да ги разглеждаме като точки. Например, ако се интересуваме от времето, за което експресът е изминал разстоянието София – Пловдив, можем да разглеждаме влака като точка, пренебрегвайки неговата дължина. Ако обаче искаме да определим времето, за което той минава покрай семафор или времето, за което пътник отива до вагон-ресторанта, тогава очевидно трябва да отчетем размерите на влака.

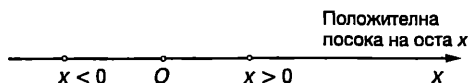
Материална точка се нарича тяло, чиито размери, форма и вътрешна структура са несъществени за дадената задача.

Понякога вместо материална точка ще използваме термина *частица* за означаване на тяло, чиито размери и структура не се отчитат. Ще подчертаем, че разглеждането на едно тяло като материална точка няма нищо общо с неговите действителни размери. Дори тела с огромни размери в определени задачи могат да се смятат за материални точки. Например Земята, при изучаване движението ѝ около Слънцето, както и цялата Слънчева система, при разглеждане на движението ѝ около центъра на Галактиката, се приемат за материални точки.

Път и преместване

Да разгледаме материална точка (частица), която се движи праволинейно спрямо земната повърхност. Правата, по която се извършва движението, ще изберем за ос x . Положителната посока на оста x и нейното начало O се избират произволно. Често за начало O се взема точката, в която частицата се е намирала в момент $t = 0$, от който започва да се отчита времето (начален момент). Ако частицата не променя посоката си на движение, удоб-

но е за положителна посока на оста x да се избере посоката на движение. Положението на частицата в даден момент от времето се определя от нейната координатата x . Ще обърнем внимание, че координатата x е алгебрична величина: $x > 0$, когато точката лежи върху положителната част на оста, и $x < 0$, ако точката лежи върху отрицателната част на оста (фиг. 1-1). Нека в момент t_1 частицата се намира в точка с



Фиг. 1-1.

координата x_1 , а в един следващ момент t_2 – в точка с координата x_2 .

Величината

$$(1.1) \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

се нарича *преместване* на частицата за интервала от време $\Delta t = t_2 - t_1$. Преместването Δx може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Ако през цялото време Δt частицата се движи в една посока, големината на преместването е равна на изминатия път, а знакът на преместването определя посоката, в която се извършва движението. Когато движението е в положителната посока на оста x , тогава $\Delta x > 0$. При движение в обратната посока $\Delta x < 0$.

В Международната система (SI) пътят и преместването се измерват в метри. Ще подчертаем, че това са различни величини. Пътят Δs е равен на разстоянието, изминато от частицата за време Δt , и може да има само положителни стойности. Преместването Δx се дефинира чрез равенство (1.1). Само при праволинейно движение в една посока големината на преместването за произволен интервал от време е равна на изминатия за същото време път. В общия случай големината на преместването е по-малка от изминатия път.

Пример 1.1. Частица извършва праволинейно движение по оста x . В момент $t_1 = 2$ s тя се намира в точка с координата $x_1 = 2$ m, в момент $t_2 = 10$ s достига до точка $x_2 = 14$ m, къде-

то променя посоката си на движение и в момент $t_3 = 14$ s преминава през точка $x_3 = 8$ m.

Определете изминатия път, знака и големината на преместването за интервала от време $\Delta t = t_3 - t_1$.

Решение. Изминатият път е

$$\Delta s = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| = 12 \text{ m} + 6 \text{ m} = 18 \text{ m}.$$

Преместването е

$$\Delta x = x_3 - x_1 = 6 \text{ m}.$$

Големината на преместването е различна от пътя, защото е станала промяна в посоката на движение.

Средна скорост

Средната скорост е величина, която широко се използва във всекидневието. В началото на полета стюардесата информира пътниците на каква височина и с каква средна скорост ще прелетят разстоянието. Средната скорост на автомобили, влакове, кораби и т.н. е важна характеристика на тяхното движение, особено когато се интересуваме колко време ще продължи пътуването. По определение средната скорост v_{cp} е равна на пътя Δs , разделен на интервала от време Δt , за което той е изминат

$$(1.2) \quad v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Средната скорост е скаларна величина, която може да има само положителни стойности. В SI се измерва в m/s (метър в секунда), но в практиката по-често скоростта се изразява в km/h (километра в час). Условно можем да отделим два случая, в които се пресмята средна скорост:

1. Интересуваме се с каква средна скорост е изминато дадено разстояние Δs . За целта определяме времето Δt , за което е изминато разстоянието Δs , и от формула (1.2) пресмятаме v_{cp} .

2. Интересува ни с каква средна скорост се е движило тялото през интервала от време Δt . Тогава определяме пътя Δs , изминат за това време, и отново по формула (1.2) пресмятаме v_{cp} .

Пример 1.2. Автомобил изминава половината от разстоянието между два града със скорост $v_1 = 30$ km/h, а втората половина –

със скорост $v_2 = 70$ km/h. Колко километра в час е средната скорост на автомобила?

Решение. Задачата е от първия вид – трябва да се определи времето Δt , за което е изминато разстоянието Δs между двата града. Първата половина от това разстояние е измината за време $\Delta t_1 = \Delta s/2v_1$, а втората половина за време $\Delta t_2 = \Delta s/2v_2$.

Следователно

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 42 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Пример 1.3. Пресметнете средната скорост на автомобила от Пример 1.2, ако през половината от времето той се е движил със скорост $v_1 = 30$ km/h, а през втората половина – със скорост $v_2 = 70$ km/h.

Решение. Задачата е от втория вид – трябва да се определи разстоянието Δs , което е изминал автомобилът за време Δt . Отначало той се е движил със скорост v_1 и за време $\Delta t/2$ е изминал разстояние $\Delta s_1 = v_1\Delta t/2$. След това за същото време е изминал разстояние $\Delta s_2 = v_2\Delta t/2$. Целият път е

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t.$$

Следователно

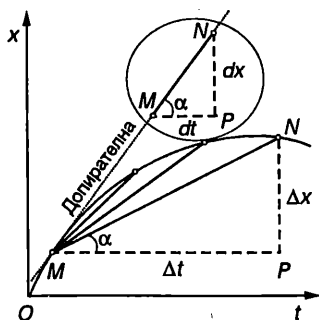
$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Моментна скорост

На *фиг.1-2* е показана зависимостта на координатата x от времето t за частица, която се движи праволинейно. В момент t_1 частицата има координата x_1 (точка M от графиката), а в момент t_2 координатата ѝ е x_2 (точка N). За време $\Delta t = t_2 - t_1$ тя извършва преместване $\Delta x = x_2 - x_1$. Наклонът на отсечката MN спрямо абсцисната ос се определя от отношението $\Delta x/\Delta t$:

$$\text{Наклон} = \Delta x/\Delta t.$$

Величината $\Delta x/\Delta t$ се измерва в m/s, т.е. тя има размерност на скорост. Нейната стойност обаче зависи от избора на интервала от време Δt , за който се пресмята, поради което дава малко информация за характера на движението. В това се убеждаваме, ако започнем да намаляваме интервала Δt , т.е. да доближаваме точка N към точка M (*фиг.1-2*). Наклонът на отсечката MN се променя и в граничния случай, когато интервалът Δt клони към



Фиг. 1-2. Моментна скорост. Когато $\Delta t \rightarrow 0$, точките M и N са много близо една до друга и отсечката, която ги свързва, лежи върху допирателната към кривата $x(t)$, прекарана през точка M (в уголемен вид отсечката MN при $\Delta t \rightarrow 0$ е показана вътре в окръжността в горната част на фигурата). Графично моментната скорост се определя по наклона на допирателната.

нула, отсечката MN лежи върху допирателната към кривата $x(t)$, прекарана през точка M . Величината

$$(1.3) \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

се нарича *моментна скорост* на частицата (на материалната точка). Както е известно от математиката, границата на отношението $\Delta x/\Delta t$, когато Δt клони към нула, е първа производна на функцията $x(t)$. Във физиката първата производна е прието да се означава dx/dt (произнася се „де хикс де те“).

И така, моментната скорост v е първа производна на координатата x по времето t

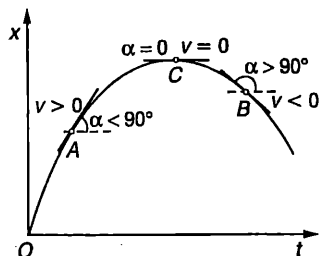
$$(1.4) \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

Графично моментната скорост се определя по наклона на допирателната към кривата $x(t)$.

Моментната скорост, за разлика от средната скорост, може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Например в точка A от *фиг. 1-3* допирателната сключва остър ъгъл с абсцисната ос ($\alpha < 90^\circ$) и функцията $x(t)$ е растяща – частицата се движи в положителната посока на оста x и моментната ѝ скорост е

положителна ($v > 0$). В точка B функцията $x(t)$ е намаляща ($\alpha > 90^\circ$), което показва, че частицата се движи в отрицателната посока на оста x . В този случай моментната скорост е отрицателна ($v < 0$). В точка C моментната скорост е нула: частицата променя посоката си на движение.

Движения, които се извършват с постоянна моментна скорост, се наричат *равномерни* движения. Ако моментната скорост се изменя с течение на времето, движението е *неравномерно*.

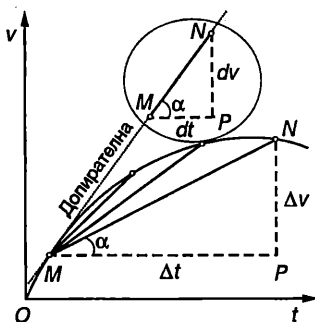


Фиг. 1-3.

Ще подчертаем, че моментната скорост характеризира движението в много малък интервал от време dt . Интервалът dt е толкова малък, че през него не настъпват практически никакви изменения на скоростта, т.е. за време dt движението е равномерно. Моментната скорост може да се разглежда като средна скорост, пресметната за много малък интервал от време dt . По-нататък за краткост моментната скорост ще наричаме просто скорост на тялото.

Ускорение

На *фиг. 1.4а* е представена графично зависимостта на скоростта v от времето t за частица, която извършва неравномерно праволинейно движение. В момент t_1 частицата се движи със скорост v_1 (точка M от графиката), а в момент t_2 скоростта ѝ е v_2 (точка N). За интервала от време $\Delta t = t_2 - t_1$ изменението на скоростта на частицата е $\Delta v = v_2 - v_1$. Отношението $\Delta v/\Delta t$ носи информация за бързината, с която се променя скоростта. Ако се намали интервалът от време Δt (точка N се приближава към точка M), наклонът на отсечката MN се променя (изменя се ъгълът α). В граничния случай, когато Δt клони към нула, ъгълът α , който отсечката MN сключва с абсцисната ос



Фиг. 1-4а. Ускорение. Когато $\Delta t \rightarrow 0$, точките M и N са много близо една до друга и отсечката, която ги свързва, лежи върху допирателната към кривата $v(t)$, прекарана през точка M (в уголен вид отсечката MN при $\Delta t \rightarrow 0$ е показана вътре в окръжността в горната част на фигурата). Графично ускорението се определя по наклона на допирателната.

α , става равен на ъгъла между оста x и допирателната към кривата $v(t)$, прекарана през точка M (фиг. 1-4а). Величината

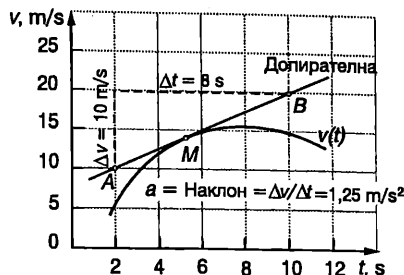
$$(1.5) \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

се нарича **ускорение** на частицата (на материалната точка). Ускорението е равно на първата производна на скоростта по времето. Тъй като самата скорост е първа производна на координатата x по времето t , ускорението може да се представи като втора производна на координатата x по времето t

$$(1.6) \quad a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

(Чете се „де две хикс де те квадрат“).

Ускорението е мярка за бързината, с която се променя скоростта. В SI то се измерва в m/s^2 (метър в секунда на квадрат). Графичното определяне на ускорението се илюстрира от фиг. 1-4б. Ускорението в точка M е равно на наклона на допирателната към кривата $v(t)$, прекарана през тази точка. Наклонът на допирателната може да се определи, ако се знаят координатите на две произволни точки A и B , лежащи върху нея. Удобно е тези точки да се изберат така, че от графиката лесно да се определят коор-



Фиг. 1-4б.

динатите им. В случая

$$a = \text{Наклон} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m/s}}{8 \text{ s}} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Подобно на скоростта, ускорението може да има както положителни, така и отрицателни стойности. От формула (1.5) се вижда, че ускорението е положително при $dv > 0$, т.е. когато скоростта нараства.

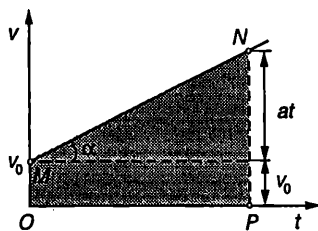
Забележка. Ще припомним, че дефинирахме моментната скорост при праволинейно движение като алгебрична величина, която може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Положителната моментна скорост нараства при $dv > 0$. Ако обаче моментната скорост е отрицателна, при $dv > 0$ тя също нараства, независимо че големината (модулът) ѝ намалява. За да не възникват недоразумения, знакът на ускорението е по-добре да се интерпретира по следния начин: ако знаците на скоростта и на ускорението на частицата са еднакви, големината на скоростта нараства. Когато знаците са противоположни, големината на скоростта намалява. На тези въпроси ще се спрем по-подробно в следващия параграф, където ще разгледаме скоростта и ускорението като векторни величини.

Равнопроменливо движение

Движения, които се извършват с постоянно по големина ускорение, се наричат **равнопроменливи движения**. При равнопроменливо движение наклонът на допирателната във всички точки от графиката на функцията $v(t)$ е еднакъв. Следователно функцията $v(t)$ е права линия (фиг. 1-5), чието уравнение е

$$(1.7) \quad v = v_0 \pm at,$$

където v_0 е началната скорост, т.е. скоростта на частицата в момент $t = 0$. Горното уравнение изразява закона за скоростта



Фиг. 1-5.

при равнопроменливо движение.

Равнопроменливо движение, при което големината на скоростта нараства, се нарича *равноускорително движение*. Ако големината на скоростта намалява, движението е *равнозакъснително*.

В уравнение (1.7) величините v , v_0 и a могат да имат както положителни, така и отрицателни стойности. Когато не става промяна на посоката на движение, е по-удобно законът за скоростта да се запише в следния вид

$$(1.8) \quad v = v_0 \pm at,$$

където v , v_0 и a са съответно големините на скоростта, на началната скорост и на ускорението. Знакът „+“ е за равноускорително движение, а знакът „-“ е за равнозакъснително движение.

Законът, по който се изменя преместването Δx , може да се определи графично. Например при праволинейно равномерно движение

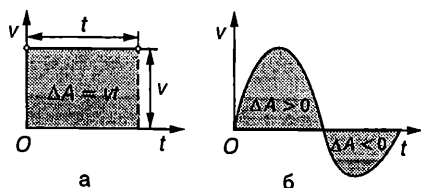
$$(1.9) \quad \Delta x = x - x_0 = vt,$$

където x и x_0 са координатите на частицата в началния момент $t = 0$ и в момента t . Графиката на скоростта при равномерно движение е показана на фиг.1-6а. Лицето на правоъгълника под графиката (защрихованата площ на фиг.1-6а), е

$$(1.10) \quad \Delta A = vt.$$

От уравнения (1.9) и (1.10) следва, че $\Delta x = \Delta A$, т.е. преместването Δx е равно на

Фиг. 1-6.



площта ΔA на фигурата, образувана от графиката на скоростта и абсцисната ос t . Този резултат се обобщава за произволно неравномерно движение. Площта ΔA се смята за положителна, ако графиката лежи над абсцисната ос, и за отрицателна в обратния случай (фиг.1-6б).

Да се върнем към равнопроменливото движение (фиг. 1-5). От казаното дотук става ясно, че преместването Δx , което частицата извършва за време t , е равно на площта на трапеца $OMNP$

$$(1.11) \quad \Delta x = \Delta A = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} t.$$

След прости преобразувания се получава

$$(1.12) \quad \Delta x = x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Уравнение (1.12) изразява закона за преместването при равнопроменливо праволинейно движение. Ще напомним, че в него величините Δx , v_0 и a могат да имат както положителни, така и отрицателни стойности. Ако не се извършва промяна на посоката на движение, законът за изминатия път е

$$(1.13) \quad \Delta s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2},$$

където v_0 е големината на началната скорост, a – големината на ускорението. Знакът „+“ е за равноускорително движение, а знакът „-“ е за равнозакъснително движение.

Пример 1.4. Мотоциклетист, който се движи със скорост $v_0 = 72 \text{ km/h}$, забелязва дете да пресича пътя и натиска спирачките. Пресметнете пътя Δs , изминат от мотоциклета:

- докато скоростта му намалее два пъти;
- до пълното спиране.

Ускорението да се приеме за постоянно, с големина $a = 5 \text{ m/s}^2$.

Решение. От законите за големината на скоростта $v = v_0 \pm at$ и за изминатия път $\Delta s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ изключваме времето t и след прости преобразувания получаваме

$$(1.14) \quad \Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

при равноускорително движение и

$$(1.15) \quad \Delta s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$$

при равнозакъснително движение.

Уравнения (1.14) и (1.15) е удобно да се използват при решаване на задачи, в които се търсят пътът или ускорението, а са известни началната и крайната скорост.

Преди да извършим пресмятанията, трябва да превърнем числените стойности на физичните величини в единици, които съответстват на SI:

$$v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$a) \quad \Delta s = \frac{(20 \text{ m/s})^2 - (10 \text{ m/s})^2}{2(5 \text{ m/s}^2)} = 30 \text{ m}.$$

$$б) \quad \Delta s = \frac{v_0^2}{2a} = 40 \text{ m}.$$

Ще отбележим, че ускорението a , което може да се получи при спиране на превозно средство, зависи от триенето между гумите и пътната настилка и не може да надминава някаква определена стойност. Спирачният път

$\Delta s = \frac{v_0^2}{2a}$ е правопрпорционален на квадрата на началната скорост v_0 . Ако началната скорост v_0 се увеличи два пъти, спирачният път нараства четири пъти. Затова безопасността на движението изисква в участъци с намалена видимост или на места, където има опасност от внезапна поява на деца или животни на платното, да се кара с намалена скорост и с повишено внимание.

Земно ускорение

От всекидневния опит е известно, че телата се привличат към Земята. Оставени без опора, те падат към нейната повърхност, като скоростта им нараства. Такова движение се нарича *свободно падане*. Ускорението, с което се движат телата при свободно падане, се нарича *земно ускорение*.

Ще приемем, че гравитационното привличане към Земята е единственият фактор, който определя свободното падане на телата и ще пренебрегнем съпротивлението на въздуха. Пръв Галилео Галилей е установил, че при такива условия:

1. Земното ускорение е еднакво за всички падащи тела, независимо от тяхната маса, размери и форма.

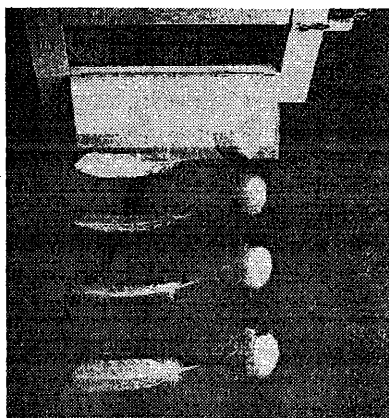
2. Земното ускорение е постоянно. То не се изменя по време на падането.

Лесно е да забележим несъответствие между тези изводи и наблюденията ни от всекидневния опит. Например ябълката пада по-бързо от перото, което е в противоречие с твърдение 1. При падане от голяма височина, ускорението постепенно намалява и накрая движението става равномерно ($a = 0$), което не се съгласува с твърдение 2. Причина за посочените привидни несъответствия е съпротивлението на въздуха. Във вакуум ябълката и перото падат едновременно, т.е. те се движат с еднакво ускорение (фиг.1-7). Ускорението при свободно падане в близост до земната повърхност се означава с g . То е приблизително равно на

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Ако в началния момент тялото е било в покой, свободното падане се извършва по права линия, вертикално надолу. Направлението на вертикалната линия може да се определи с отвес – тежко тяло, окачено на нишка. Продължението на верти-

Фиг.1-7. Свободното падане на ябълката и на перото във вакуум се извършва с еднакво ускорение g . Снимката показва положението на двете тела през равни интервали от време. Разстоянието между образите се увеличава, защото при свободното падане скоростта непрекъснато нараства.



калната (отвесна) линия преминава през центъра на Земята.

Ще отбележим, че денонощното въртене на Земята води до слаба зависимост на земното ускорение от географската ширина, а също до отклонение на отвеса от посоката към центъра на Земята. На тези въпроси ще се спрем по-подробно в §7.

Земното ускорение зависи също от надморската височина, на която се намират тялото. Например при издигане на височина 30 km, земното ускорение намалява с около 1%. Неправилната форма на Земята и нееднородностите в нейната структура също предизвикват малки изменения в земното ускорение за различни точки от земната повърхност.

Влиянието на изброените фактори върху земното ускорение в повечето случаи може да се пренебрегне. Освен това, в примерите и задачите от тази глава ние ще пренебрегваме съпротивлението на въздуха и ще използваме формулите, получени за движение с постоянно ускорение, за описване на свободното падане на телата.

Пример 1.5. Тяло е пуснато без начална скорост от височина $h = 20$ m. Определете:

а) времето, за което тялото достига земната повърхност;

б) скоростта, с която тялото достига земната повърхност.

Решение. а) Времето за падане определяме от закона за пътя $\Delta s = h = gt^2/2$ при равноускорително движение без начална скорост ($v_0 = 0$), което се извършва с ускорение $a = g$:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2\text{ s}.$$

б) От закона за скоростта $v = gt$ за равноускорително движение без начална скорост изразяваме времето $t = v/g$ и го заместваме в закона за пътя:

$$v = \sqrt{2gh} \approx 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Пример 1.6. Тяло е хвърлено вертикално нагоре с начална скорост $v_0 = 20$ m/s. Определете времето на издигане и максималната височина, до която достига тялото.

Решение. Движението на тялото е равнозакъснително – скоростта намалява по линейния закон $v = v_0 - gt$. В най-горната точка, където става промяна на посоката на движение, скоростта е нула. От уравнението $v_0 - gt = 0$ определяме времето за издигане

$$t = \frac{v_0}{g} \approx 2\text{ s}.$$

Заместваме времето в закона за пътя при равнозакъснително движение и определяме максималната височина:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \approx 20\text{ m}.$$

Сравняването на резултатите от Пример 1.5 и Пример 1.6 показва, че когато едно тяло е хвърлено вертикално нагоре:

1. *Времето за издигане е равно на времето за падане;*

2. *Скоростта, с която тялото пада на земната повърхност, е равна на началната скорост, с която е било хвърлено вертикално нагоре.*

Ще подчертаем, че тези резултати са в сила, когато съпротивлението на въздуха е пренебрежимо малко. В действителност, поради съпротивлението на въздуха, времето за издигане е по-малко от времето за падане, а скоростта, с която тялото достига точката на хвърляне, винаги е по-малка от началната скорост.

Задачи

1. Частица се движи по оста x . Координатата на частицата се изменя с течение на времето по закона $x = c_1 t + c_2 t^3$, където $c_1 = 2$ m/s, $c_2 = 1$ m/s³. Определете:

а) Скоростта и ускорението на частицата в момент $t = 2$ s;

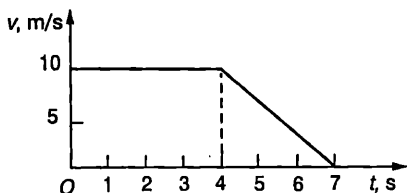
б) Средната скорост, с която се движи частицата през първите 3 s.

2. Частица започва да се движи в положителната посока на оста x . Координатата на частицата се изменя с течение на времето по закона $x = c_1 + c_2 t - c_3 t^3$, където $c_1 = 2$ m, $c_2 = 5$ m/s, $c_3 = 3$ m/s³. Определете:

а) координатата на частицата в началния момент $t = 0$;

б) скоростта и ускорението на частицата в момент $t = 1$ s;

в) на какво максимално разстояние от координатното начало ще се отдалечи частицата и как ще се движи след това.

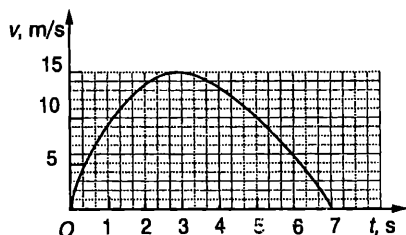


Фиг. 1-8.

3. Докажете, че средната скорост v_{cp} при равнопроменливо движение е равна на средното аритметично на началната скорост v_0 и крайната скорост v : $v_{cp} = (v_0 + v)/2$.

4. На фиг. 1-8 е показана графиката на скоростта на автомобил, който извършва праволинейно движение. Опишете движението на автомобила и определете стойностите на величините, които го характеризират. Определете графично пътя, който изминава автомобилът.

5. На фиг. 1-9 е представена графиката на ско-



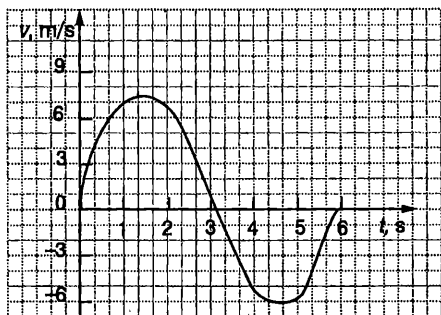
Фиг. 1-9.

ростта на частица, извършваща праволинейно движение. Определете графично преместването на частицата.

Указание. Използвайте мрежата, за да определите заградената от графиката площ.

6. На фиг. 1-10 е показана графиката на скоростта на частица, извършваща праволинейно движение. Определете графично премест-

Фиг. 1-10.



ването на частицата и изминатия от нея път.

7. Асансьор започва да се издига равноускорително. През първата секунда той изминава 1 m. Какъв път ще измине асансьорът през втората секунда?

8. Автомобил от Формула 1 излиза на праволинеен участък от пистата и увеличава скоростта си от 108 km/h на 324 km/h за 5 s. Колко е ускорението на автомобила? Какво разстояние изминава автомобилът за това време? Движението е равноускорително.

9. Мотоциклет, който се движи с постоянна скорост 72 km/h, пресича кръстовище при червен светофар. В същия момент от кръстовището тръгва с постоянно ускорение полицейски автомобил и настига нарушителя на 600 m след кръстовището. Колко е ускорението на автомобила?

10. В цевта на автомат „Калашников“ куршумът се движи равноускорително и излита от нея със скорост $v = 700$ m/s. Колко е ускорението на куршума? Дължината на цевта е $s = 40$ cm.

11. Преди да отвори парашута, парашутист пада със скорост 60 m/s. Непосредствено след отварянето на парашута движението е равнозакъснително с ускорение 30 m/s². За да се приземи безопасно, парашутистът трябва да достигне земната повърхност със скорост 5 m/s. На каква минимална височина трябва да се отвори парашутът?

12. От товарен влак, който се движи с постоянна скорост 36 km/h, се откача последният вагон. Вагонът се движи равнозакъснително и спира след 30 s. Колко метра е разстоянието между влака и вагона в момента на спирането на вагона?

13. По-прецизното пресмятане на спирачния път изисква в него да се включи и разстояние, което автомобилът изминава, преди водачът да успее да задейства спирачките.

Автомобил се движи със скорост 90 km/h. Водачът вижда пред себе си пресичащ магистралата човек и 0,8 s след това задейства спирачките. Колко метра е спирачния път на автомобила? Ускорението да се смята за постоянно, равно по големина на 5 m/s².

14. Ускорението на свободно падане на повърхността на Луната е 6 пъти по-малко от земното ускорение g . Камък, хвърлен вертикално нагоре, се издига на височина 20 m над земната повърхност. На каква височина ще се издигне камъкът, ако се хвърли със същата начална скорост от повърхността на Луната?

2. Криволинейно движение

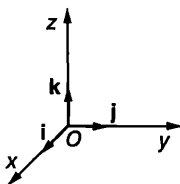
Отправна система

Движението на телата винаги се разглежда спрямо определено тяло, което се приема за неподвижно. Например разглежда се въртенето на Земята около Слънцето, движението на самолета спрямо земната повърхност, на пътника спрямо самолета и т.н.

Тялото, спрямо което се определя положението и движението на другите тела, се нарича отправно тяло.

Отправно тяло заедно с неподвижно свързани към него координатна система и часовник, чрез които се определя положението на другите тела спрямо отправното тяло в различните моменти от времето, образуват *отправна система*. В класическата механика се приема, че свойствата на пространството се описват от Евклидовата геометрия, а времето тече по един и същи начин във всички отправни системи (абсолютно време).

Ще използваме правоъгълна декартова координатна система, чийто три взаимно перпендикулярни оси x , y и z се пресичат в началото O на координатната система. На *фиг. 2-1* са показани единичните вектори (с модул единица) i , j и k , насо-

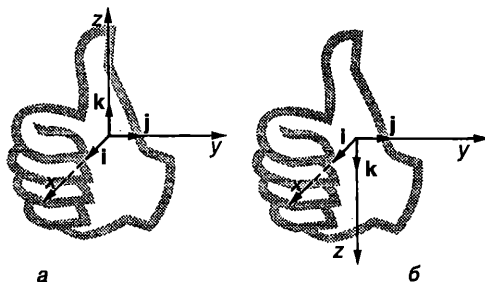


Фиг. 2-1. Правоъгълна декартова координатна система.

чени в положителните посоки съответно на координатните оси x , y и z .

В зависимост от взаимната ориентация на единичните вектори, координатната система може да бъде *дясна* или *лява*. От кой вид е дадена координатна система може да се определи по правилото на

дясната ръка (*фиг. 2-2*): Поставя се дясната ръка така, че свитите пръсти да сочат от вектора i към вектора j по посока на по-малкия ъгъл между тях. Ако опънатият палец сочи по посока на единичния вектор k , координатната система е дясна (*фиг. 2-2a*). В обратния случай тя е лява (*фиг. 2-2б*). Във физиката е прието да се използват десни координатни системи.



Фиг. 2-2. Правоъгълни координатни системи: а) дясна; б) лява.

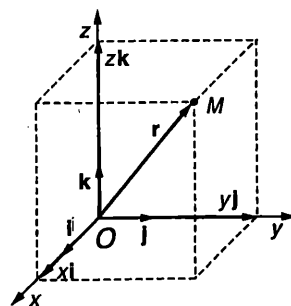
Радиус-вектор

Положението на произволна точка M в пространството се задава с нейния радиус-вектор r . Той се представя геометрично с насочена отсечка, прекарана от началото O на координатната система до разглежданата точка M (*фиг. 2-3*). Радиус-векторът може да се представи като сума от три вектора, които са успоредни на координатните оси

$$(2.1) \quad r = xi + yj + zk,$$

където векторите xi , yj и zk се наричат **компоненти** на радиус-вектора r . Декартовите координати x , y и z на точка M също се наричат компоненти (скаларни компо-

Фиг. 2-3. Радиус-вектор на точката M и неговите компоненти.



ненти) на радиус-вектора $\mathbf{r}$. Скалярните компоненти могат да имат както положителни, така и отрицателни стойности.

Модулът (големината) на радиус-вектора е

$$(2.2) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Траектория

Когато дадена материална точка се движи, нейният радиус-вектор $\mathbf{r}$ се изменя, т.е. $\mathbf{r}$ е функция на времето t

$$(2.3) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

На векторното уравнение (2.3) съответстват три скалярни уравнения за координатите x , y и z на материалната точка

$$(2.4) \quad x = x(t); y = y(t); z = z(t).$$

Уравнения (2.4) и еквивалентното на тях векторно уравнение (2.3) се наричат *кинематични уравнения* на движението на материалната точка. Линията, която материалната точка описва спрямо определена отправна система, се нарича *траектория* на материалната точка. В зависимост от вида на траекторията движенията се разделят на *праволинейни* движения и *криволинейни* движения. Ако са известни кинематичните уравнения на движението, от тях може да се изключи времето t и да се определи уравнението на траекторията.

Пример 2.1. Кинематичното уравнение на движението на материална точка е $\mathbf{r} = \alpha t^2 \mathbf{i} + \beta t^2 \mathbf{j}$, където α и β са положителни константи. Определете уравнението на траекторията.

Решение. На даденото в условието на задачата векторно уравнение за радиус-вектора на материалната точка съответстват следните три скалярни уравнения за нейните координати (компоненти на радиус-вектора):

$$x = \alpha t; y = \beta t^2; z = 0,$$

откъдето правим извода, че движението се извършва в равнината xy . В уравнението за x -координатата изключваме времето, като заместим $t = x/\alpha$. Получаваме

$$y = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2.$$

Това е уравнение на парабола – материалната точка се движи в равнината xy по парабола.

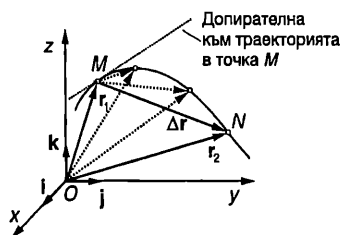
Път и преместване

Разстоянието Δs , измерено по траекторията, което материалната точка изминава за определен интервал от време Δt , се нарича *път*. Пътят е скалярна величина, която се измерва в метри (m) и може да има само положителни стойности.

На *фиг. 2-4* е показана част от траекторията на материална точка, която извършва криволинейно движение. В момент t_1 тя се намира в точка M с радиус-вектор $\mathbf{r}_1$, а в момент t_2 – в точка N с радиус-вектор $\mathbf{r}_2$. За време $\Delta t = t_2 - t_1$ материалната точка е изминала път Δs , равен на дължината на дъгата MN . Величината

$$(2.5) \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

се нарича *преместване* на материалната точка за интервала от време Δt . Преместването е векторна величина, която се представя геометрично с насочена отсечка с начало в началната точка M и край в крайната точка N . От фигурата се вижда,



Фиг.2-4. Преместване.

че големината на преместването Δr (дължината на отсечката MN) е по-малка от изминатия път Δs (дължината на дъгата MN).

Ако постепенно намаляваме интервала от време Δt , точка N се доближава към точка M и разликата между големината на преместването Δr и изминатия път Δs намалява. В граничния случай, когато точките M и N са безкрайно близо една до друга, дължините на хордата MN и на дъгата MN са равни. Преместването $d\mathbf{r}$, което материалната точка извършва за безкрайно малък интервал от време dt , се нарича *елементарно преместване*. Големината на елементарното преместване $d\mathbf{r}$ е равна на изминатия за същото време път ds

$$(2.6) \quad d\mathbf{r} = ds.$$

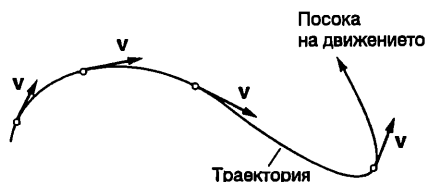
Векторът на елементарното преместване $d\mathbf{r}$ е насочен по допирателната към траекторията в посока на движението.

Скорост

Първата производна на радиус-вектора $\mathbf{r}$ на материална точка по времето t се нарича *скорост* $\mathbf{v}$ на материалната точка

$$(2.7) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Скоростта $\mathbf{v}$ е векторна величина, която има същата посока, както елементарното преместване $d\mathbf{r}$ – насочена е по допирателната към траекторията по посока на движението (фиг. 2-5).



Фиг. 2-5. Скоростта на материалната точка винаги е насочена по допирателната към траекторията по посока на движението.

Големината на скоростта е

$$(2.8) \quad v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt},$$

където е отчетено, че големината на елементарното преместване dr е равна на елементарния път ds . Следователно големината на скоростта е равна на първата производна на пътя s по времето t .

Заместваме радиус-вектора $\mathbf{r}$ от уравнение (2.1) в уравнение (2.7) и получаваме

$$(2.9) \quad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

където $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ и $v_z = \frac{dz}{dt}$ са съответно x -, y - и z -компонентата на вектора на скоростта. Ще обърнем внимание, че скаларните компоненти на скоростта, т.е. проекциите на вектора на скоростта върху координатните оси на правоъгълната координатна система, са алгебрични величини – те могат да имат както поло-

жителни, така и отрицателни стойности. Например, когато векторната компонента $v_x \mathbf{i}$ на скоростта е насочена в положителната посока на оста x , т.е. по посока на единичния вектор $\mathbf{i}$, тогава скаларната компонента v_x има положителна стойност ($v_x > 0$). Ако $v_x < 0$, това означава, че векторната компонента $v_x \mathbf{i}$ е насочена в отрицателната посока на оста x , т.е. посоката на $v_x \mathbf{i}$ е противоположна на посоката на $\mathbf{i}$.

Големината на скоростта v се изразява с формулата

$$(2.10) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Ускорение

Векторът $\mathbf{a}$, равен на първата производна на скоростта $\mathbf{v}$ по времето t , се нарича *ускорение* на материалната точка

$$(2.11) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Тъй като, от друга страна, скоростта е първа производна на радиус-вектора $\mathbf{r}$ по времето t , ускорението може да се представи като втора производна на $\mathbf{r}$ по t

$$(2.12a) \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}$$

или

$$(2.126) \quad \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

където $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ и $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ са

съответно x -, y - и z -компонентите на ускорението. Ако са известни трите компоненти a_x , a_y и a_z на ускорението, неговата големина a се определя по формулата

$$(2.13) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

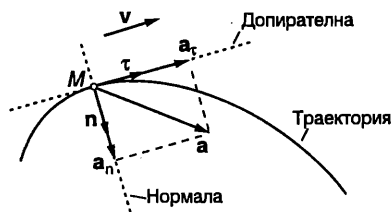
Тангенциално и нормално ускорение

По-нататък ще се ограничим с разглеждането само на такива криволинейни движения, които се извършват в една равнина. На фиг. 2-6 е показана част от траекторията на материална точка, която се движи само в една равнина (равнината на

чертежа). В момент t тя се намира в точка M от траекторията. Нека τ и n са два взаимно перпендикулярни единични вектора, успоредни съответно на допирателната и на нормалата към траекторията, прекарани през точка M . Векторът τ е насочен по посока на движението, т.е. по посока на скоростта v , а векторът n е насочен към вдлъбнатата страна на траекторията. Векторът на ускорението a също лежи в равнината, в която се извършва движението и може да се разложи на две компоненти, насочени съответно в направление на допирателната (тангентата) и на нормалата към траекторията

$$(2.14) \quad a = a_\tau + a_n = a_\tau \tau + a_n n.$$

Компонентата $a_\tau = a \cdot \tau$, която е успоредна на допирателната към траекторията, се нарича *тангенциално ускорение* на материалната точка. Другата компонента $a_n = a \cdot n$, която е насочена по нормалата към траекторията, се нарича *нормално ускорение* на материалната точка.

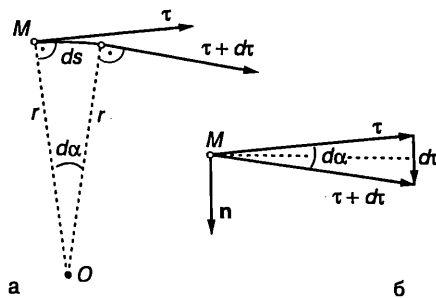


Фиг. 2-6. Тангенциално и нормално ускорение.

За да определим компонентите a_τ и a_n на ускорението, ще отчетем, че скоростта v е насочена по посока на единичния вектор τ , т.е. $v = v\tau$, където v е големината (модулът) на скоростта. По определение

$$(2.15) \quad a = \frac{d}{dt}(v\tau) = \frac{dv}{dt}\tau + v\frac{d\tau}{dt},$$

където е използвано известното от математиката правило за диференциране на произведение. Ще обърнем внимание, че по време на движението единичният вектор τ непрекъснато променя посоката си – допирателните към различните точки от криволинейна траектория имат различни направления. Затова производната $d\tau/dt$ е различна от нула. За да я определим, ще използваме чертежа от фиг. 2-7. За време dt материалната точка изминава



Фиг. 2-7.

път $ds = vdt$. Тъй като участъкът ds от траекторията има много малка дължина, той може да се разглежда като дъга от окръжност, чийто център ще означим с O . Радиусът r на тази окръжност се нарича *радиус на кривината* на траекторията в точка M (фиг. 2-7а). Да означим с $d\tau$ изменението на единичния вектор τ за време dt . Ъгълът между векторите τ и $\tau + d\tau$ е равен на централния ъгъл $d\alpha = ds/r$ ($d\alpha$ е в радиани), съответстващ на дъгата ds (като ъгли с взаимно перпендикулярни рамене). От векторния триъгълник на фиг. 2-7б определяме модула на вектора $d\tau$

$$(2.16) \quad d\tau = 2|\tau| \sin \frac{d\alpha}{2} = d\alpha = \frac{ds}{r},$$

където е отчетено, че $|\tau| = |\tau + d\tau| = 1$ и

$\sin(d\alpha/2) = d\alpha/2$ (ъгълът $d\alpha$ е много малък).

От фиг. 2-7б се вижда, че векторът $d\tau$ е успореден на нормалата n към траекторията, прекарана през точка M : $d\tau = d\tau n$.

Следователно

$$(2.17) \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} n = \frac{ds}{rdt} n = \frac{v}{r} n,$$

където съгласно с уравнение (2.8) $ds/dt = v$.

Заместваме $d\tau/dt$ от уравнение (2.17) в (2.15) и получаваме

$$(2.18) \quad a = \frac{dv}{dt} \tau + \frac{v^2}{r} n.$$

Тангенциалното ускорение

$$(2.19) \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} \tau$$

се определя от първата производна dv/dt на големината на скоростта v по времето t , т.е. то характеризира бързината, с която се изменя големината на скоростта. Ко-

гато скоростта нараства ($dv/dt > 0$), тангенциалното ускорение е насочено по посока на единичния вектор τ , т.е. по посока на скоростта. Ако скоростта намалява ($dv/dt < 0$), векторите a_τ и τ имат противоположни посоки – тангенциалното ускорение е насочено обратно на вектора на скоростта.

Нормалното ускорение

$$(2.20) \quad a_n = \frac{v^2}{r} \mathbf{n}$$

винаги е насочено по посока на единичния вектор $\mathbf{n}$, т.е. по нормалата към вдлъбнатата страна на траекторията. Нормалното ускорение не променя големината, а само посоката на скоростта – показва бързината, с която се променя посоката на скоростта. То зависи от големината на скоростта v и от радиуса r на кривината на траекторията в дадената точка.

Движения, при които тангенциалното ускорение е нула ($a_\tau = 0$), се наричат *равномерни движения*. При равномерно движение не се променя големината на скоростта ($v = \text{const}$). Движенията с постоянно по големина тангенциално ускорение се наричат *равнопроменливи движения*. При *равноускорителното движение* тангенциалното ускорение е насочено по посока на скоростта и нейната големина нараства. При *равнозакъснителното движение* a_τ и v имат противоположни посоки, поради което големината на скоростта намалява.

От уравнение (2.20) се вижда, че всички криволинейни движения, включително и равномерните, са ускорителни. Те се извършват с различно от нула нормално ускорение, което променя посоката на скоростта. Единственото движение без нормално ускорение е праволинейното движение. Формално можем да смятаме, че праволинейната траектория има безкрайно голям радиус на кривината ($r = \infty$). Тогава съгласно с уравнение (2.20) за праволинейното движение $a_n = 0$.

И така, *единствено праволинейното равномерно движение се извършва без ускорение* ($a = a_\tau = a_n = 0$).

Пример 2.2. Материална точка се движи по криволинейна траектория в една равнина с тангенциално ускорение $a_\tau = \alpha$ и нормално ускорение $a_n = \beta$, където α и β са положителни

константи. В началния момент $t = 0$ точката е в покой. Изразете радиуса на кривината на траекторията на материалната точка като функция на изминатия път s .

Решение. Нормалното ускорение е право пропорционално на квадрата на скоростта и обратно пропорционално на радиуса на кривината на траекторията: $a_n = v^2/r$ или $r = v^2/a_n$. По траекторията точката се движи равноускорително без начална скорост. При такова движение скоростта v и пътят s са свързани със съотношението $v^2 = 2a_\tau s = 2\alpha s$ (вж. Пример 1.4 на стр.14). Заместваме v^2 във формулата за радиуса на кривината и получаваме

$$r = \frac{2\alpha}{\beta} s.$$

Пример 2.3. Тяло е хвърлено от земната повърхност с начална скорост v_0 , сключваща ъгъл α с хоризонта. Земното ускорение е g . Съпротивлението на въздуха не се отчита.

а) Получете уравнението на траекторията на тялото.

б) Определете нормалното и тангенциалното ускорение в началния момент и във върха на траекторията.

в) При какъв ъгъл α радиусът на кривината във върха на траекторията е 8 пъти по-малък, отколкото в точката на хвърляне?

Решение. а) Движението на тялото в отправна система, свързана със земята, се извършва в една равнина. Избираме правоъгълна координатна система с ос x , насочена хоризонтално, и ос y , насочена вертикално нагоре. Началото O на координатната система съвпада с положението на тялото (което разглеждаме като материална точка) в началния момент $t = 0$. Проекциите на началната скорост v_0 върху координатните оси са (фиг. 2-8)

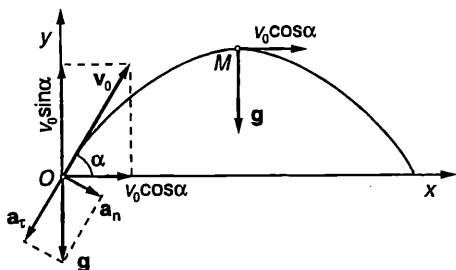
$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \text{ и } v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Кинематичните уравнения на движението са

$$x = (v_0 \cos \alpha) t \text{ и } y = (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2.$$

Ще обърнем внимание, че движението на хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта тяло може да се разглежда като сложно движение, съставено от две прости праволинейни движения: равномерно праволинейно движение в направление на хоризонталната ос x и равнопроменливо движение с ускорение g (земно ускорение) във вертикално направление.

От кинематичното уравнение за координатата x изразяваме времето t и го заместваме в уравнението за y . След прости алгебрични преобразования намираме уравнението $y(x)$ на



Фиг. 2-8.

траекторията

$$y = (\tan \alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

което е уравнение на парабола (фиг. 2-8).

б) Пълното ускорение на тялото е равно на земното ускорение $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, т.е. по време на движението ускорението остава постоянно по големина и посока. В началната точка O разлагаме ускорението на две компоненти – нормално ускорение a_n и тангенциално ускорение a_t . От фиг. 2-8 се вижда, че

$$a_t = -g \sin \alpha \text{ и } a_n = g \cos \alpha.$$

Във върха M на траекторията $a_t = 0$ и $a_n = g$ (фиг. 2-8).

в) Радиусът на кривината на траекторията и нормалното ускорение са свързани със съотношението $a_n = v^2/r$. Следователно: $r = v^2/a_n$. За точка O :

$$v = v_0; a_n = g \cos \alpha; r_O = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

За върха M на траекторията:

$$v = v_0 \cos \alpha; a_n = g; r_M = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

По условие $r_M/r_O = 1/8$, откъдето след заместване определяме: $\cos^3 \alpha = 1/8$ или $\alpha = 60^\circ$.

Задачи

1. Кинематичното уравнение на движението на материална точка е $\mathbf{r} = bt\mathbf{i} + ct\mathbf{j}$, където $b = 3 \text{ m/s}$, $c = 4 \text{ m/s}$. Определете големината на скоростта v на материалната точка.

2. Кинематичното уравнение на движението на материална точка е $\mathbf{r} = (bt + c)\mathbf{i} + dt^2\mathbf{j}$, където $b = 3 \text{ m/s}$, $c = 4 \text{ m}$, $d = 2 \text{ m/s}^2$. Определете големината на преместването на точката за интервала от време от $t = 2 \text{ s}$ до $t = 4 \text{ s}$.

3. Кинематичното уравнение на движението на материална точка е $\mathbf{r} = bt\mathbf{i} + ct^2\mathbf{j}$, където $b = 3 \text{ m/s}$, $c = 1 \text{ m/s}^2$. Определете големините на скоростта v и на ускорението a на материалната точка в момент $t = 2 \text{ s}$.

4. Кинематичното уравнение на движението на материална точка е $\mathbf{r} = (bt^2 - ct)\mathbf{i} + dt^3\mathbf{j}$, където $b = 4 \text{ m/s}^2$, $c = 8 \text{ m/s}$, $d = 1 \text{ m/s}^3$. Определете големината на ускорението a на точката в момента, когато скоростта $\mathbf{v}$ е насочена перпендикулярно на оста x .

5. Кинематичното уравнение на движението на частица е $\mathbf{r} = bt\mathbf{i} + ct^2\mathbf{j}$, където $b = 10 \text{ m/s}$, $c = 5 \text{ m/s}^2$. Определете радиуса на кривината на траекторията в точката, в която скоростта на частицата сключва ъгъл 45° с оста x .

6. Частица се движи в една равнина по криволинейна траектория, при което скоростта v намалява. В даден момент тангенциалното ускорение на частицата е равно по големина на нормалното v ускорение. Колко градуса е ъгълът между векторите на скоростта v и на ускорението a на частицата в този момент?

7. Тяло е хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта с начална скорост v_0 от точка A с радиус-вектор $\mathbf{r}_A$. Изразете радиус-вектора на тялото като функция на времето t . Земното ускорение е $\mathbf{g}$. Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

8. Тяло е хвърлено от земната повърхност под ъгъл $\alpha = 60^\circ$ спрямо хоризонта с начална скорост $v_0 = 30 \text{ m/s}$. На каква височина h скоростта на тялото е насочена под ъгъл $\beta = 45^\circ$ спрямо хоризонта? Съпротивлението на въздуха се пренебрегва. Земното ускорение е $g = 10 \text{ m/s}^2$.

9. Тяло е хвърлено успоредно на хоризонта с начална скорост $v_0 = 20 \text{ m/s}$ от точка с координати $x_0 = 0$ и $y_0 = 20 \text{ m}$. Изразете радиуса на кривината на траекторията r на тялото като функция на хоризонталната координата x . Колко метра е r в точката, в която тялото достига земната повърхност? Началото на правоъгълната координатна система се намира върху земната повърхност. Приемете земното ускорение $g = 10 \text{ m/s}^2$.

10. Тяло е хвърлено от земната повърхност под ъгъл α спрямо хоризонта и достига максимална височина h в точка M от траекторията си. Определете ъгъла α , ако радиусът на кривината на траекторията в точка M е $r = h$.

11. Тяло се движи в равнината xy с постоянно ускорение $\mathbf{a} = -a\mathbf{j}$. Уравнението на траекторията е $y = bx - cx^2$, където b и c са положителни константи. Определете големината на скоростта на тялото в точка с координати $x = y = 0$.

3. Движение по окръжност

Ускорение

Както за всяко криволинейно движение, при движението по окръжност ускорението $\mathbf{a}$ може да се представи като сума от две компоненти (фиг.3-1): тангенциално ускорение $\mathbf{a}_\tau$ и нормално ускорение $\mathbf{a}_n$ ($\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$). Ускорението $\mathbf{a}$ винаги е насочено навътре към окръжността. Когато големината на скоростта нараства, тангенциалното ускорение е насочено по посока на скоростта $\mathbf{v}$, а векторите $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ сключват остър ъгъл (фиг.3-1а). При закъснително движение векторите $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ сключват туп ъгъл, а тангенциалното ускорение $\mathbf{a}_\tau$ е насочено в противоположна на скоростта $\mathbf{v}$ посока (фиг.3-1б).

Нормалното ускорение при движение по окръжност винаги е насочено към центъра на окръжността, поради което се нарича още *центростремително ускорение*. Неговата големина зависи от скоростта v и от радиуса r на окръжността

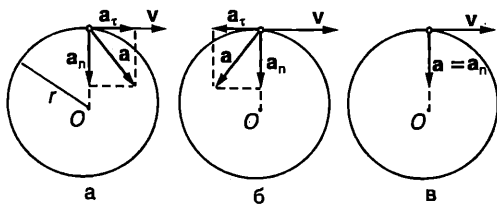
$$(3.1) \quad a_n = \frac{v^2}{r}.$$

При равномерно движение по окръжност $a_\tau = 0$ и $v = \text{const}$. Тъй като r също е константа, от уравнение (3.1) следва, че равномерното движение по окръжност се извършва с постоянно по големина ускорение, което е насочено към центъра на окръжността (фиг.3-1в).

Периодично движение

Движения, които се извършват по един и същ начин, повтаряйки се през равни интервали от време, се наричат *периодични движения*. Най-малкият интервал от вре-

Фиг.3-1.



ме, след който се повтарят стойностите на всички физични величини, характеризиращи движението, се нарича *период* T . Честотата ν показва колко пъти за единица време (1s) се повтаря едно периодично движение. По определение двете величини са свързани със съотношението

$$(3.2) \quad T = \frac{1}{\nu} \text{ или } \nu = \frac{1}{T}.$$

Честотата ν има размерност s^{-1} (секунда на минус първа). В чест на немския физик Хайнрих Херц (1857–1894) единицата за честота е наречена *херц* ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$).

Равномерното движение по окръжност е прост пример за периодично движение. Лесно се установява връзката между скоростта v , периода T и честотата ν . За време $t = T$ материалната точка извършва едно пълно завъртане и изминава път, равен на дължината $2\pi r$ на окръжността.

Тогава

$$(3.3) \quad v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \nu r.$$

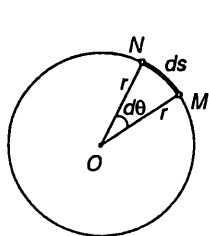
Ще обърнем внимание, че в общия случай неравномерното движение по окръжност не е периодично движение. При него се променя времето за едно завъртане, а също така в дадена точка от окръжността скоростта и ускорението на материалната точка са различни при различните обиколки.

Ъглова скорост и ъглово ускорение

На фиг.3-2 е показана материална точка, която се движи по окръжност с радиус r . За малък интервал от време dt тя се премества от точка M до точка N и описва дъга с дължина ds . Ъгълът $d\theta$, на който се завърта радиусът r , свързващ материалната точка с центъра на окръжността, се нарича *ъгъл на завъртане* (измерва се в радиани). Големината на ъгъла на завъртане $d\theta$ и дължината на дъгата ds са свързани с известното от геометрията съотношение $d\theta = ds/r$. Разделяме двете страни на това равенство на dt и получаваме:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dtr} = \frac{v}{r},$$

където сме отчели, че $ds/dt = v$.



Фиг.3-2

Величината

$$(3.4) \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$$

се нарича **ъглова скорост** на материалната точка. Ъгловата скорост ω е равна на първата производна на ъгла на завъртане θ по времето t . Тя се измерва в единици rad/s (радиан за секунда). Уравнение (3.4) изразява връзката между Ѫгловата скорост ω и големината на скоростта v . При неравномерно движение по окръжност тези две величини се изменят с течение на времето. За равномерно движение по окръжност от уравнения (3.3) и (3.4) Ѫгловата скорост може да се изрази чрез периода T или чрез честотата ν :

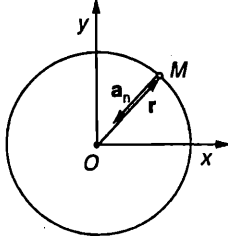
$$(3.5) \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Първата производна на Ѫгловата скорост ω по времето t (или втората производна на ъгла на завъртане θ по времето t) се нарича **Ѫглово ускорение** ϵ на материалната точка

$$(3.6) \quad \epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ъгловото ускорение показва бързината, с която се променя Ѫгловата скорост. При равномерно движение по окръжност $\omega = \text{const}$ и $\epsilon = 0$. Между Ѫгловото ускорение ϵ и тангенциалното ускорение a_t съществува връзка, която може да се определи с помощта на уравнения (3.6), (3.4) и (2.19)

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{a_t}{r}, \text{ т.е.}$$



Фиг.3-3.

(3.7)

$$\epsilon = \frac{a_t}{r}$$

За описване движението на материална точка по окръжност е удобно да се използва правоѪлна координатна система с начало в центъра O на окръжността (фиг.3-3). Тогава радиус-векторът r на материалната точка има постоянен модул, равен на радиуса r на окръжността, но по време на движението непрекъснато променя посоката си (описва окръжност). Като се отчетат уравнения (3.1) и (3.4), нормалното ускорение се записва във векторна форма

$$(3.8) \quad a_n = - \left(\frac{v}{r} \right)^2 r = -\omega^2 r$$

Знакът минус показва, че нормалното (центростремителното) ускорение винаги е насочено в противоположна на радиус-вектора r посока, т.е. към центъра на окръжността (фиг.3-3).

Пример 3.1. Материална точка извършва равнопроменливо движение ($\epsilon = \text{const}$) по окръжност с радиус r . Определете законите, по които се изменят Ѫгловата скорост ω и Ѫгълът на завъртане θ като функция на времето t . В началния момент ($t = 0$) $\omega = \omega_0$ и $\theta = 0$.

Решение. При равнопроменливо криволинейно движение (в частност движение по окръжност) са в сила същите закони за големината на скоростта и за пътя, както при равнопроменливото праволинейно движение. Необходимо е само в уравнения (1.8) и (1.13) да заместим големината на ускорението a с големината на тангенциалното ускорение a_t :

$$v = v_0 \pm a_t t; \quad s = v_0 t \pm \frac{a_t t^2}{2},$$

където знакът „+“ е за равноускорително движение, а знакът „-“ е за равнозакъснително движение. Заместваме $v = \omega r$, $v_0 = \omega_0 r$, $a_t = \epsilon r$ и $s = r\theta$ и след като съкратим r получаваме

$$\omega = \omega_0 \pm \epsilon t; \quad \theta = \omega_0 t \pm \frac{\epsilon t^2}{2}$$

Следователно при равнопроменливо движение по окръжност между Ѫгловите величини, които го характеризират (Ѫгъл на завъртане θ , Ѫглова скорост ω и Ѫглово ускорение ϵ), съществуват аналогични зависимости, както

при линейните величини (път s , скорост v и тангенциално ускорение a_t). Тези зависимости могат формално да се получат, ако в законите за скоростта и пътя се замени s с θ , v с ω и a_t с ϵ .

Векторно произведение на два вектора

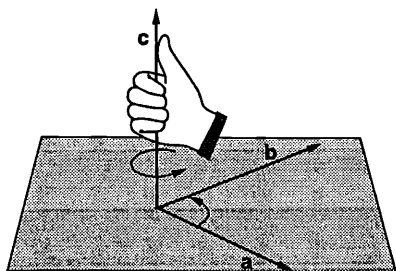
Редица физични величини, с които ще се запознаем по-нататък (например ъглова скорост, момент на сила, момент на импулса, кориолисова сила, магнитна сила и др.), се представят като векторно произведение на други две векторни физични величини. Затова най-напред ще припомним някои от основните свойства на векторното произведение (означава се със символа „ $\times$ “), изучени в курса по математика. По определение векторно произведение на два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се нарича вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ с модул

$$(3.9) \quad c = ab|\sin \alpha|,$$

където a и b са модулите на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, α е ъгълът между двата вектора. Векторът $\mathbf{c}$ е насочен перпендикулярно на равнината, в която лежат векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Посоката му се определя по правилото на дясната ръка (фиг.3-4): ако поставим дясната си ръка така, че свитите пръсти да сочат от вектора $\mathbf{a}$ към вектора $\mathbf{b}$ в посока на по-малкия ъгъл между тях, тогава опънатият палец сочи посоката на векторното произведение $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Векторното произведение е антикомутативно, т.е. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Ако два вектора са колинеарни ($\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$), тяхното векторно произведение е нула.

Фиг.3-4. Векторно произведение на два вектора.

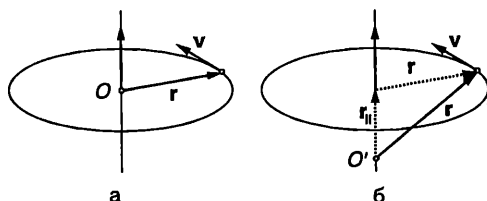


Ъгловата скорост като вектор

Движението на материална точка по окръжност може да се разглежда като въртене около ос, перпендикулярна на равнината, в която лежи окръжността и минаваща през нейния център O (фиг.3-5). Векторът на ъгловата скорост ω е насочен в направление на оста на въртене и се дефинира чрез равенството

$$(3.10) \quad \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r},$$

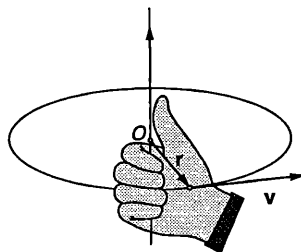
където за начало на координатната система може да се вземе както центърът O на окръжността (фиг.3-5а), така и произволна друга точка O' , лежаща върху оста на въртене (фиг.3-5б).



Фиг.3-5. Векторът на ъгловата скорост ω е насочен успоредно на оста на въртене.

Посоката на вектора на ъгловата скорост ω се определя по правилото на дясната ръка, което в конкретния случай е най-удобно да се прилага по следния начин: обхващаме с дланта на дясната си ръка окръжността, така че пръстите да сочат посоката на движение, тогава опънатият палец сочи посоката на ъгловата скорост (фиг.3-6).

Фиг.3-6. Посоката на вектора на ъгловата скорост ω се определя по правилото на дясната ръка.



Пример 3.2. Докажете, че от векторното уравнение $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ следва скаларното уравнение $v = \omega R$, изразяващо връзката между големината на скоростта v , големината на ъгловата скорост ω и радиуса R на окръжността. Разгледайте два случая:

а) началото на координатната система съвпада с центъра на окръжността;

б) за начало на координатната система е избрана произволна точка O' от оста на въртене.

Решение. а) Когато радиус-векторът $\mathbf{r}$ е перпендикулярен на оста на въртене (фиг.3-5а), неговият модул е равен на радиуса R на окръжността, а векторите $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ са взаимно перпендикулярни (ъгълът между тях е $\alpha = \pi/2$). Тогава

$$v = \omega r |\sin \alpha| = \omega R \sin \frac{\pi}{2} = \omega R.$$

б) Радиус-векторът $\mathbf{r}$ може да се разложи на две компоненти: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, където компонентата $\mathbf{r}_{\parallel}$ е успоредна на оста на въртене, а $\mathbf{r}_{\perp}$ е перпендикулярна на оста на въртене (фиг.3-5б). Тогава

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp},$$

където е отчетоно, че векторите $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}_{\parallel}$ са успоредни (фиг.3-5б), поради което векторното им произведение е нула. Векторът $\mathbf{r}_{\perp}$ е перпендикулярен на скоростта $\mathbf{v}$, а модулът му е равен на радиуса на окръжността R . Следователно

$$v = \omega r_{\perp} |\sin \alpha| = \omega R \sin \frac{\pi}{2} = \omega R.$$

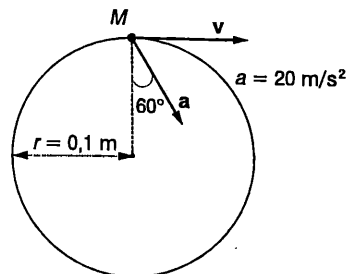
Задачи

1. Материална точка се движи равномерно по окръжност с радиус $r = 10$ cm с период $T = 2$ s. Определете ъгловата скорост и центростремителното ускорение на материалната точка.

2. Пресметнете центростремителното ускорение на точка, която се намира: а) на земния екватор; б) на северния полюс. Радиусът на Земята е $R = 6400$ km.

3. Космонавт се върти в центрофуга, като описва окръжност с радиус $r = 5$ m, лежаща в хоризонтална равнина. При каква ъглова скорост центростремителното ускорение на космонавта е $6g$ (g – земно ускорение)?

4. Електрон се движи в еднородно магнитно поле по кръгова орбита с радиус $r = 10$ cm. Определете скоростта v на електрона, ако честотата на въртене е $\nu = 2.10^4$ Hz.



Фиг.3-7.

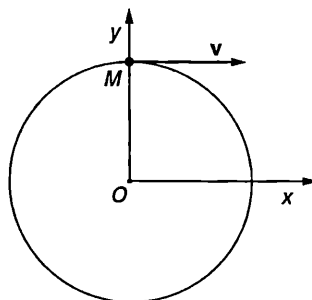
5. Частица започва да се движи по окръжност с радиус $r = 0,1$ m. Ъгълът на завъртане се изменя с течение на времето по закона $\theta = ct^2$, където $c = 0,5$ rad/s². Определете тангенциалното, нормалното и пълното ускорение на частицата в момент $t = 2$ s.

6. На фиг.3-7 е показана частица, която се движи по окръжност и в даден момент преминава през точка M от окръжността. Като използва данните от фигурата, определете големината на скоростта на частицата в този момент.

7. Частица, която първоначално е в покой, започва да се движи по окръжност с радиус $r = 0,2$ m с постоянно ъглово ускорение $\varepsilon = 0,6$ rad/s². След колко секунди векторът на пълното ускорение $\mathbf{a}$ на частицата ще сключва ъгъл 30° с вектора на скоростта $\mathbf{v}$? Пресметнете големината на $\mathbf{a}$ в този момент.

8. Материална точка M се движи равномерно със скорост v по окръжност с радиус r . Положението на материалната точка в началния момент $t = 0$ е показано на фиг.3-8. Запишете кинематичните уравнения на движението на материалната точка $x(t)$ и $y(t)$ спрямо правоъгълната координатна система, показана на фигурата. Центърът на окръжността лежи в началото на координатната система.

Фиг.3-8.



Динамика на материална точка



След като се запознахме в Глава 1 с основните кинематични характеристики на движението, ще преминем към обсъждане на въпроса какво предизвиква движението. Всички движения, освен праволинейното равномерно движение, се извършват в резултат на взаимодействието между телата, чиято количествена мярка са силите. *Динамиката* е част от механиката, която изучава движението на телата, предизвикано от действащите им сили. В нейните основи лежат три закона, формулирани от Нютон през 1687 г. в труда му „Математически начала на натуралната философия“. Трите закона на Нютон са обобщение на опита. Те не могат да се изведат логически като следствия от други, по-основни закони. Затова се наричат *принципи на механиката*. Законите на класическата (нютонова) механика имат ограничена област на приложимост. С тяхна помощ се описват движенията на макроскопичните тела, чиято скорост е много по-малка от скоростта на светлината. Движенията със скорости, близки до скоростта на светлината, се изучават от *релативистката механика*, а движенията на микрочастиците (елементарни частици, атоми, молекули) – от *квантовата механика*.

4. Принципи на механиката

Закон за инерцията

Ако хлъзнем по килим хокейна шайба, скоростта ѝ бързо намалява и, след като измине известно разстояние, тя спира. При същата начална скорост шайбата изминава по-голямо разстояние върху гладка маса, а върху лед скоростта ѝ ще намалява още по-бавно. Причина за изменението на скоростта на шайбата са силите на триене и съпротивление. Когато те намаляват, скоростта се изменя по-бавно. Какво би станало, ако не действат никакви сили? Отговор на този фундаментален за физиката въпрос дава законът за инерцията (първи принцип на механиката):

Всяко тяло запазва състоянието си на покой или на праволинейно равномерно движение, докато външно въздействие не го изведе от това състояние.

Ние не бихме могли да поставим шайбата, нито кое да е друго тяло, в такива идеални условия, когато то не взаимодейства с никакви други тела. След като не е възможно едно тяло напълно да се изолира от въздействието на другите тела, какво ни дава основание да разглеждаме горното твърдение като основен физичен закон? Нали той не може непосредствено да бъде проверен? Отговор дава практиката – този закон косвено се потвърждава от всички извършени досега наблюдения. Във всички случаи дори на най-незначителни отклонения от праволинейното равномерно движение е установено наличие на сили, които обясняват тези отклонения.

Праволинейното равномерно движение е също толкова „естествено“ състояние на телата, както покаят, затова не е необходимо никакво въздействие, за да се поддържат тези две състояния. Този фундаментален факт, формулиран най-напред от Галилей като закон за инерцията, а по-късно приет от Нютон за първи принцип на механиката, бележи началото на формирането на физиката като наука в съвременния смисъл на това понятие.

Тяло, което не взаимодейства с други тела, се нарича *свободно тяло*. Праволинейното и равномерно движение на свободно тяло се нарича *движение по инерция*. Движението по инерция е проява на динамичното свойство на телата, наречено *инертност*.

Както е известно, всяко движение е относително. Дали във всички отправни системи е в сила законът за инерцията? Например при рязко спиране на влака (закъснително движение с голямо ускорение) незакрепените предмети, които са били първоначално в покой, започват да се движат спрямо влака, без да са подложени на външно въздействие. Следователно в отправната система, свързана с движещия се с ускорение влак, законът за инерцията не е в сила.

Отправни системи, спрямо които е в сила законът за инерцията, се наричат *инерциални отправни системи*. В закона за инерцията се съдържат две твърдения:

1. На всички тела е присъщо свойството инертност, т.е. свойството да поддържат състоянието си на покой или на праволинейно равномерно движение.

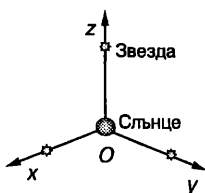
2. Съществува поне една инерциална отправна система.

Да допуснем, че дадена отправна система K е инерциална. Тогава всички други отправни системи, които се движат праволинейно и равномерно спрямо K , също са инерциални. Отправни системи, които се движат с ускорение спрямо K , са *неинерциални* – в тях не е в сила законът за инерцията.

Както знаем, Земята се върти около оста си и всички точки от нейната повърхност описват окръжности. Движението по окръжност, подобно на всяко друго криволинейно движение, се извършва с ускорение. Например ускорението на точките около екватора е приблизително $0,03 \text{ m/s}^2$. Следователно отправната система, свързана със земната повърхност, не е инерциална. Тъй като нейното ускорение обаче е много по-малко от ускорението на телата, чието движение изучаваме (например ускорението на падащите тела е около 10 m/s^2), в повечето случаи можем да пренебрегнем денонощното въртене на Земята. Няма да отчитаме и въртенето на Зе-

мята около Слънцето, което се извършва с още по-малко ускорение (около $0,006 \text{ m/s}^2$). Ще смятаме, че отправната система, свързана със земната повърхност, е инерциална.

Самата Слънчева система, както и другите звезди, се въртят около центъра на Галактиката, но ускоренията при това криволинейно движение са много по-малки (ускорението на Слънчевата система е около 10^{-10} m/s^2). Затова отправна система, чието начало е в центъра на Слънцето, а координатните оси преминават през три отдалечени звезди (фиг.4-1) с много по-голяма точност може да се смята за инерциална, отколкото отправната система, свързана със земната повърхност. Нарича се отправна система, свързана с „неподвижните звезди“.



Фиг.4-1. Инерциална отправна система, свързана с „неподвижните звезди“.

Сила

Като количествена мярка за взаимодействието на телата в механиката се използва физичната величина *сила*. Силата е векторна величина – характеризира се с големина, посока и приложна точка. В тази глава ще разглеждаме динамиката на материална точка или на твърди тела, които се движат само постъпателно. Когато едно тяло не се върти (или деформира), не е съществено в коя негова точка е приложена силата. Затова ще смятаме, че всички сили са приложени в центъра на тялото.

Големините на различните сили могат да се сравняват по ускоренията, които те създават на дадено тяло, наречено *пробно тяло*. Нека например силата F_1 , приложена към пробното тяло, създава ускорение a_1 (фиг.4-2а). Ако под действие на друга сила F_2 пробното тяло се движи с n пъти по-голямо ускорение ($a_2 = n a_1$), то-



Фиг.4-2. Силите могат да се сравняват по ускоренията, които създават на пробното тяло.

гава силата F_2 е n пъти по-голяма от силата F_1 (фиг.4-2б). Посоката на силата съпада с посоката на ускорението, което тя създава.

Опитът показва, че когато върху едно тяло едновременно са приложени няколко (n на брой) сили $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, тяхното механично действие е еквивалентно на действието на една единствена сила F , която е равна на геометричната (векторна) сума от всички сили

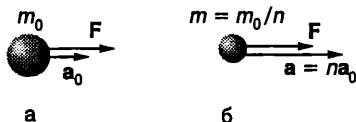
$$(4.1) \quad F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Силата F се нарича *резултантна* или *равнодействаща* на всички приложени към тялото сили.

Маса

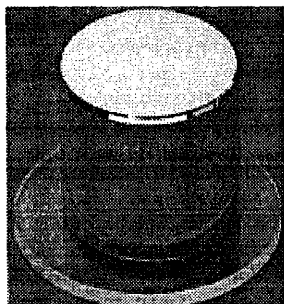
Телата притежават свойството инертност, т.е. те се стремят да запазят състоянието си на покой или на праволинейно равномерно движение и се противопоставят на всеки опит да се приведат в движение или да се измени тяхната скорост (по големина или по посока). Количествена мярка за инертността на телата е физичната величина *маса*. Масите на различни тела могат да се сравнят по ускоренията, които те получават под действие на една и съща сила. Да означим с m_0 масата на пробното тяло, която бихме могли да приемем за единица мярка за маса. Под действие на сила F пробното тяло получава ускорение a_0 . Да приложим същата сила F върху друго тяло, чиято маса m искаме да сравним с масата на пробното тяло. Колкото по-голямо е ускорението a на тялото, толкова по-малка е неговата маса. Например, ако $a = n a_0$ (фиг.4-3), то $m = m_0/n$.

Опитът показва, че масата е адитивна величина – масата на едно тяло е сума от масите на отделните негови части. Масата е положителна скаларна величина, ко-



Фиг.4-3. Масите на телата могат да се сравнят по ускоренията, които телата получават под действие на една и съща сила.

ято се измерва в килограми. По определение един килограм (1 kg) е маса, равна на масата на международния прототип на килограма (фиг. 4-4).



Фиг.4-4. Международният прототип на килограма – цилиндър с еднакви диаметър и височина (39 mm), е направен от изключително стабилната сплав платина–иридий (90% Pt и 10% Ir). Приет е през 1887 година и се съхранява в Международното бюро за мерки и теглилки в Севър (близо до Париж, Франция).

Втория принцип на механиката

Многобройните наблюдения и опити показват, че ускорението на телата зависи както от тяхната маса, така и от действащите им сили. Резултатите от опита се обобщават от втория принцип на механиката:

Ускорението на едно тяло е пропорционално на резултантната сила, която му действа, и е обратно-пропорционално на неговата маса:

$$(4.2) \quad a = \frac{F}{m} \text{ или } F = ma.$$

Единицата за сила се нарича нютон (N). Съгласно с уравнение (4.2) 1 N е сила, която приложена към тяло с маса 1 kg му придава ускорение 1 m/s²:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}.$$

Като отчетем, че ускорението a е първа производна на скоростта v и втора производна на радиус-вектора r по времето t , уравнение (4.2) може да се запише във вида

$$(4.3) \quad F = m \frac{dv}{dt} \text{ или } F = m \frac{d^2r}{dt^2}.$$

В някои случаи масата m се изменя по време на движението. Например при реактивно движение става изхвърляне на изгорелите газове и масата на ракетата непрекъснато намалява. Засега ще се ограничим с разглеждане движението само на тела с постоянна маса, а на реактивното движение ще се спрем в §10. Когато $m = \text{const}$, уравнение (4.3) се записва във вида

$$(4.4) \quad F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

Векторът p , равен на произведението от масата m и скоростта v на тялото (материалната точка)

$$(4.5) \quad p = mv,$$

се нарича *импулс на тялото*. Импулсът е една от най-важните динамични характеристики на телата. Уравнение (4.4) изразява втория принцип на механиката в друга формулировка (дадена от самия Нютон): *Скоростта, с която се изменя импулсът на едно тяло (първата производна на импулса по времето), е равна на резултантната сила, действаща на тялото.*

Ще отбележим, че при движението на тяло с постоянна маса уравнения (4.3) и (4.4) са еквивалентни. Формулировката на втория принцип на механиката, изразена с уравнение (4.4), обаче е по-обща. Тя описва също така движението на тела с променлива маса, както и релативистките движения, извършващи се със скорости, близки до скоростта на светлината.

Уравнение (4.4) се записва и във вида

$$(4.6) \quad F dt = dp.$$

Величината $F dt$ се нарича *импулс на силата* F за безкрайно малкия интервал от време dt . Съгласно с уравнение (4.6) из-

менението на импулса на едно тяло за интервал от време dt е равно на импулса на действащата сила за същия интервал от време.

Вторият принцип на механиката е в сила само за инерциални отправни системи. От уравнения (4.2) и (4.3) в частност следва, че при $F = 0$ ускорението е нула, а скоростта – постоянна ($a = 0$ и $v = \text{const}$), т.е. тяло, на което не действа сила, се движи праволинейно и равномерно. Можем ли да направим извода, че вторият принцип на механиката включва в себе си като частен случай закона за инерцията (първия принцип на механиката)? Такъв извод е неправилен, защото законът за инерцията постулира като обобщение от опита, че съществуват инерциални отправни системи и движение по инерция. Ако не беше възможно движението по инерция и не съществуваха инерциални отправни системи, вторият принцип на механиката нямаше да е в сила.

Пример 4.1. Известно е, че когато скачаме от високо, трябва да приклеknем при приземяването. Направете количествена оценка на средната сила и средното ускорение в момента на приземяване след скок от височина 2 m върху бетонна писта. Разгледайте два случая:

а) приземяване с опънати крака. Приемете, че подметките на обувките и меката тъкан на патите се свиват общо с 0,7 cm;

б) приземяване с приклякане от 40 cm. Масата на човека приемете за 70 kg.

Решение. Ще използваме резултата от Пример 1.4 на стр.14, за да определим скоростта, с която тялото достига земната повърхност

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m})} = 6,3 \text{ m/s}.$$

а) Спираният път е $s = 0,7 \text{ cm}$. Приемаме движението за равнозакъснително с начална скорост $v = 6,3 \text{ m/s}$ и определяме ускорение-то

$$a = v^2/2s = 2800 \text{ m/s}^2.$$

Ускорението a , което е около 280 пъти по-голямо от земното ускорение g , се създава от силата F , с която настилката действа върху човека (пренебрегваме силата на тежестта). Големината на силата F определяме от уравнението на втория принцип на механиката:

$$F = ma = (70\text{kg})(2800\text{m/s}^2) = 2 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Това е много голяма сила, която води до счупвания и други тежки травми.

б) В този случай:

$$s = 40 \text{ cm}, a = 50 \text{ m/s}^2 \text{ и } F = 3,4 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Тази сила при удара се поема от мускули-те и сухожилията. За физически здрав и трениран човек тя не е опасна.

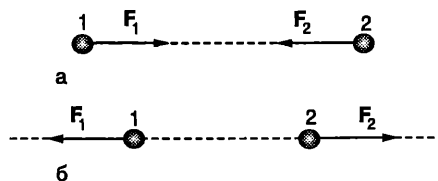
Трети принцип на механиката

Механичното действие на две тела едно върху друго винаги има характер на взаимодействие. Според третия принцип на механиката, който е обобщение на опита:

силите на взаимодействие между две материални точки са равни по големина, противоположни по посока и действат в направление на правата, съединяваща двете точки.

$$(4.7) \quad F_1 = -F_2,$$

където F_1 е силата, с която материалната точка 2 действа на материалната точка 1, а F_2 е силата, с която 1 действа на 2. На фиг. 4-5а е показан случаят, когато двете материални точки взаимно се привличат, а на фиг.4-5б – отблъскват.



Фиг.4-5. Силите на взаимодействие между две тела (материални точки) са равни по големина и противоположни по посока.

Третият принцип на механиката може да се формулира и по следния начин: *всяко действие поражда равно по големина и противоположно по посока противодействие*. Например материалната точка 1 от фиг.4-5 действа на материалната точка 2 със сила F_2 , а тя и противодейства с равна по големина и противоположна по посока сила F_1 . Ще отбележим, че силите на действие и противодействие са приложени към различни тела, поради което не се уравновесяват.

Коя от двете сили на взаимодействие ще наречем сила на действие и коя – на про-

тиводействие, не е съществено. Важното е, че те винаги възникват и действат едновременно (не е възможно действие без противодействие). Силите на действие и противодействие винаги имат една и съща природа. Например при удар между две билиардни топки възникват еластични сили на отблъскване. Два постоянни магнита взаимодействат с магнитни сили, два точкови заряда – с електрични сили, а парашутистът и Земята взаимно се привличат с гравитационни сили. Не е възможно силата на действие да е например електрична, а на противодействие – гравитационна.

Пример 4.2. Към вертикална стена е насочена хоризонтална струя вода, която след удара в стената се стича надолу. Определете силата, с която водата действа на стената. Струята изтича от тръба с радиус $r = 1$ cm с дебит $Q = 6$ l/s. Плътноста на водата е $\rho = 1000$ kg/m³.

Решение. За време dt върху стената попада вода с маса $dm = \rho Q dt$. Дебитът Q е равен на обема вода, изтекъл от напречното сечение πr^2 на тръбата за 1 s, т.е. $Q = \pi r^2 v$, откъдето определяме скоростта v на водата: $v = Q/(\pi r^2)$. При удара в стената скоростта на водата намалява от v до нула. Съгласно с втория принцип на механиката импулсът на силата F , с която стената действа на водата, е равен на изменението на импулса на водата:

$$F dt = dp = v dm = \frac{\rho Q^2}{\pi r^2} dt, \text{ откъдето}$$

$$F = \frac{\rho Q^2}{\pi r^2} = \frac{(1000 \text{ kg/m}^3)(6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})^2}{3,14(0,01 \text{ m})^2} = 115 \text{ N}.$$

Според третия принцип на механиката водата действа на стената със същата по големина сила (115 N), която е насочена в противоположна посока (към стената).

Задачи

1. Пътник, който седял на последната седалка на автобус, иска да съди водача. Според пътника, водачът рязко е натиснал спирачките, при което куфар от предната част на автобуса полетял назад и го наранил. Ако вие сте съдия, ще приемете ли обвинението на пътника? Обяснете.

2. Барон Мюнхаузен твърди, че сам се изтеглил за косите от блатото. Не посягва ли баронът? Обяснете.

3. Две топки с различни маси се удрят. Коя топка се движи с по-голямо ускорение по време на удара? Обяснете.

4. Тяло с маса 1 kg се движи под действие на две взаимно перпендикулярни сили с големина съответно 20 N и 21 N. Колко е ускорението на тялото?

5. Тяло с маса 0,5 kg се движи под действие на две равни по големина сили, които сключват помежду си ъгъл 120°. Определете големината на силите, ако ускорението на тялото е 2 m/s².

6. Топка за тенис с маса $m = 60$ g, която лети със скорост $v = 30$ m/s перпендикулярно срещу стена, се удря в стената и отскача в обратна посока със същата по големина скорост. Определете средната сила, с която стената действа на топката, ако продължителността на удара е $\tau = 3 \cdot 10^{-3}$ s.

7. Частица с маса $m = 2$ g се движи в равнината xy . В даден момент скоростта на частицата е $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, където $v_x = 1$ m/s, $v_y = 2$ m/s. За интервал от време $\tau = 2$ s на частицата действа постоянна сила $\mathbf{F}$, след което скоростта ѝ става $\mathbf{v}_1 = 2v_x \mathbf{i} - v_y \mathbf{j}$. Определете големината и посоката на силата $\mathbf{F}$.

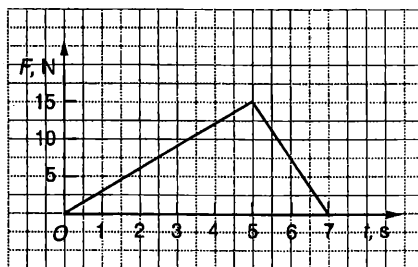
8. Тяло с маса $m = 0,2$ kg, което първоначално е в покой, започва да се движи под действие на постоянна по посока сила $\mathbf{F}$, чиято големина се изменя, както е показано на графиката от фиг.4-6. Определете импулса на силата и крайната скорост на тялото.

9. Тяло с маса $m = 0,5$ kg, което първоначално е в покой, започва да се движи под действие на постоянна по посока сила, чиято големина се изменя с течение на времето по закона $F = F_0 + ct$, където $F_0 = 10$ N, $c = 2$ N/s.

а) Постройте графика на функцията $F(t)$.

б) Пресметнете скоростта на тялото в момент $t = 3$ s.

Фиг.4-6.



5. Видове сили

Динамиката изучава движението на телата под действие главно на гравитационни сили, сили на триене и сили на еластичност. Силите на еластичност ще разгледаме в Глава 5, а тук ще се ограничим с изучаването само на гравитационните сили и силите на триене. Гравитацията е едно от четирите фундаментални взаимодействия в природата. Силите на триене и еластичните сили са проява на друго фундаментално взаимодействие – електромагнитното. В края на този параграф ще направим кратък обзор на фундаменталните взаимодействия и на съвременните теории, които се стремят да обединят тези взаимодействия и да ги опишат от единна гледна точка.

Гравитационни сили

Съгласно с първия принцип на механиката телата, които не взаимодействат с други тела, се движат праволинейно и равномерно (или се намират в покой). Всички други движения се извършват под действие на сили. Какви сили заставят планетите да се въртят около Слънцето, а Луната – около Земята? Като обобщава резултатите от многобройни астрономически наблюдения Нютон стига до извода, че небесните тела взаимно се привличат със сили, имащи същата природа, както силите, с които Земята привлича заобикалящите ни тела (например падащата от дървото ябълка). Сили на всеобщо привличане (гравитационни сили) действат между всички тела във Вселената: както между Слънцето и планетите, така и между Земята и „ябълката на Нютон“.

Законът на Нютон за гравитацията гласи:

Между всеки две тела (материални точки) от Вселената действат сили на взаимно привличане, наречени гравитационни сили, чиято големина е правопрпорционална на произведението от масите на телата и е обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между тях.

Ако материалните точки имат маси m_1 и m_2 и са разположени на разстояние една от друга (фиг. 5-2), големината на гравитационната сила е

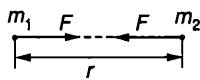
$$(5.1) \quad F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

където γ е универсална природна константа, наречена *гравитационна константа*. Стойността на гравитационната константа е определена експериментално. $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

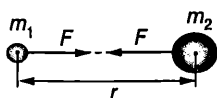
Съгласно с третия принцип на механиката гравитационните сили на взаимодействие между две материални точки са ни по големина и противоположни по посока (фиг.5-2). Те действат в направление на правата, съединяваща материалните точки.

Фиг.5-1. Според легендата, Нютон, набивайки как пада ябълка, потънал в дълбоки мишления за причината, по която всички мети се увличат в посока, съпадаща с ката към центъра на Земята. Според друг (ростен) вариант на тази легенда, когато вата на Нютон паднала ябълка, осенила гята за всеобщото привличане.





Фиг. 5-2.



Фиг. 5-3.

Ще отбележим, че уравнение (5.1) изразява големината на силата на гравитационно взаимодействие между две материални точки. Може обаче да се докаже математически, че по същата формула се определят гравитационните сили на привличане между еднородно кълбо и материална точка или между две еднородни кълба (фиг. 5-3). В този случай разстоянието r се измерва от центъра на кълбата.

Пример 5.1. Земята привлича Луната с гравитационна сила 2.10^{20} N. Колко нютона е силата, с която Луната действа на Земята? Масата на Земята е 80 пъти по-голяма от масата на Луната.

Решение. Съгласно с третия принцип на механиката силите на взаимодействие между две тела винаги са равни по големина и противоположни по посока. Следователно Луната, въпреки че има много по-малка маса, привлича Земята със същата сила (2.10^{20} N), с каквато ѝ действа Земята.

Пример 5.2. Две еднородни топки с маси $m_1 = 1$ kg и $m_2 = 10$ kg са разположени на разстояние $r = 1$ m една от друга (фиг. 5-3). Пресметнете гравитационната сила, с която те взаимно се привличат.

Решение. Гравитационната сила се определя от закона на Нютон (5.1)

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} =$$

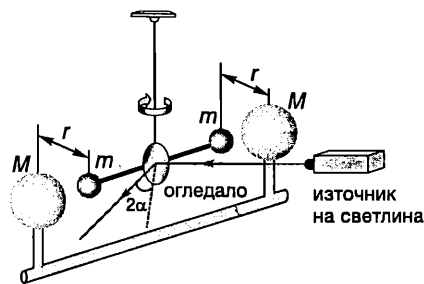
$$= (6,67 \cdot 10^{-11}) \frac{(1 \text{ kg})(10 \text{ kg})}{(1 \text{ m})^2} = 6,67 \cdot 10^{-10} \text{ N}.$$

Това е много малка сила – приблизително равна на теглото на песъчинка с диаметър 0,1 mm. Толкова малки сили е много трудно да бъдат измерени експериментално. Затова, въпреки че гравитацията е универсално свойство на материята, във всекидневния живот ние не можем непосредствено да наблюдаваме ефекта от гравитационното привличане между две земни тела с обичайни размери.

Гравитационна константа

Гравитационната константа γ е измерена през 1789 година от английския физик Хенри Кавендиш (1731–1810). Опитът на Кавендиш е сред най-важните за развитието на физиката експерименти, защото γ е една от фундаменталните физични константи. Ако е известна нейната стойност, могат да се пресметнат редица други величини: например масите на Земята, Слънцето и на другите небесни тела и едновременно с това да се провери законът на Нютон за гравитацията.

Опитната постановка е показана схематично на фиг. 5-4. Две еднакви топчета с маси m са закрепени на двата края на лека хоризонтална пръчка, която е окачена на вертикална нишка. Близко до топчетата се поставят две големи оловни кълба, всяко с маса M . Гравитационните сили на привличане F на топчетата към оловните кълба завъртат пръчката и нишката се усуква. Като се измери ъгълът на усукване на нишката α , определя се силата F . (Доказва се, че големината на силата F е пропорционална на ъгъла α .) Тъй като α е малък ъгъл (около 1°), за точното му измерване се използва светлинен лъч, отразен от прикрепеното към нишката огледалце. Когато са известни m , M , F и r (фиг. 5-4), гравитационната константа γ се изразява от уравнение (5.1) и се пресмята числената ѝ стойност.



Фиг. 5-4. Опит на Кавендиш.

Сила на тежестта

Ако приемем Земята за инерциална отпавна система, познатата от училищния курс по физика сила на тежестта $G = mg$ е равна на гравитационната сила, с която Земята привлича телата, намиращи се в близост до нейната повърхност. Ще разглеждаме Земята като еднородно кълбо с радиус R_3 и маса M_3 , а телата върху нейната повърхност ще приемем за материални точки. Тогава силата на тежестта, която действа на тяло с маса m , се определя от закона на Нютон (5.1)

$$(5.2) \quad G = \gamma \frac{mM_3}{R_3^2} = mg,$$

където земното ускорение

$$(5.3) \quad g = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} = \text{const}$$

е еднакво за всички тела, намиращи се в близост до земната повърхност. (Влиянието на въртенето на Земята върху земното ускорение е разгледано в §7.)

Пример 5.3. Как се изменя земното ускорение g като функция на височината h над земната повърхност? Разгледайте случая, когато $h \ll R_3$, където R_3 е радиусът на Земята.

Решение. Земното ускорение $g(h)$ на височина h е

$$g(h) = \gamma \frac{M_3}{(R_3 + h)^2} = g \frac{1}{(1 + h/R_3)^2},$$

където g е земното ускорение на повърхността на Земята, т.е. при $h = 0$. Тъй като по условие $h/R_3 \ll 1$, ще използваме формулата $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, която е в сила за малки стойности на x , т.е. при $x \ll 1$ (в случая $n = -2$). Тогава

$$g(h) \approx g(1 - \frac{2h}{R_3}),$$

т.е. земното ускорение намалява приблизително по линеен закон при увеличаване на височината h над земната повърхност.

Пример 5.4. На фиг. 5-5 е представена принципната схема на извършения от Ф. Йоли през 1878 г. опит за определяне на гравитационната константа. Към едното рамо на везни са

прикрепени две блюда, свързани с нишка, която преминава през тесен канал, прокаран по диаметъра на тежко оловно кълбо с маса M . Двете блюда се намират на еднакво разстояние r от центъра на кълбото. Когато върху горното блюдо се постави топче с маса m , везните се уравновесяват от теглилка с маса m_1 , поставена на дясното блюдо (фиг.5-5). Ако топчето се премести на долното блюдо, за уравновесяване на везните е необходима теглилка с маса m_2 . По тези данни определете гравитационната константа.

Решение. Условието за равновесие на везните, когато топчето се намира на горното блюдо, е

$$m_1 g = mg + F,$$

където $m_1 g$ и mg са силите на тежестта, действащи върху теглилката и топчето. $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$

е големината на допълнителната гравитационна сила, с която оловното кълбо привлича топчето.

Когато топчето се премести на долното блюдо, новото условие за равновесие е

$$m_2 g = mg - F.$$

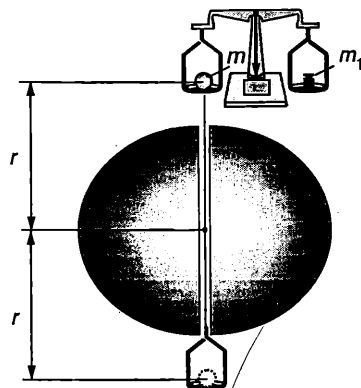
Изваждаме почленно двете уравнения и получаваме $(m_1 - m_2)g = 2F$, откъдето определяме гравитационната константа

$$\gamma = \frac{(m_1 - m_2)gr^2}{2mM}.$$

В резултат на своите опити Йоли получава за гравитационната константа стойност

$$\gamma = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Фиг.5-5. Опит на Йоли.



Принцип за еквивалентност

В динамиката масата е мярка за инертността на телата. Затова масата, която влиза в уравнението на втория принцип на механиката $F = ma$ ще наречем *инертна маса* ($m = m_i$). Гравитационното взаимодействие се характеризира с гравитационната маса m_g . В направените дотук разглеждания негласно предполагахме, че двете маси са еднакви ($m = m_i = m_g$). Сега ще се спрем по-подробно на този въпрос, тъй като съвсем не е очевидно защо две толкова различни на пръв поглед явления – инерция и гравитация, трябва да се описват с една и съща физична величина.

Под действие на силата на тежестта G тяло с инертна маса m_i се движи с ускорение a , чиято големина се определя от уравнението на втория принцип на механиката: $G = m_i a$. От друга страна, силата на тежестта е гравитационна сила, която се изразява от нютония закон за гравитацията $G = \gamma \frac{m_i M_3}{R_3^2}$, в който влиза гравитационната маса m_g на тялото. От тези две уравнения изразяваме ускорението a

$$a = \frac{m_g}{m_i} \left(\gamma \frac{M_3}{R_3^2} \right),$$

където изразът в скобите е константа. Експериментално е установено с голяма точност, че всички тела, пуснати от една и съща точка, падат с еднакво ускорение $a = g = \text{const}$. Следователно отношението m_g/m_i има една и съща стойност за всички тела и при подходящ избор на измерителните единици (на стойността на гравитационната константа γ) то може да се положи равно на единица, т.е. $m_i = m_g = m$.

Не съществува нито един експериментален факт, който да сочи възможни различия между гравитационната и инертната маса. Затова във физиката се формулира общ принцип, според който те са еквивалентни. Айнщайн поставя *принципа за еквивалентност на гравитационната и инертната маса* в основите на Общата теория на относителността (теория на гравитацията). Към принципа за еквивалентност ще се върнем отново в следващия параграф, при изучаването на инерчните

сили и състоянието на безтегловност.

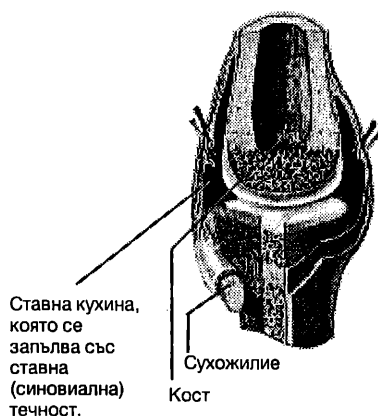
Сили на триене

Движението на телата в реални условия винаги е съпроводено с действие на сили на триене. Триенето между повърхностите на две твърди тела, в отсъствие на течен или газов слой между тях, се нарича *сухо триене*, а триенето между два слоя от течност или газ – *вътрешно* или *вискозно триене*.

При движението на твърдо тяло във флуид (течност или газ) се извършва вискозно триене между прилепналия към тялото слой от флуида и заобикалящия го флуид. Обикновено силите на вискозно триене са значително по-малки от силите на сухо триене. Затова тънък слой от смазка, който прави триенето между две повърхности отчасти вискозно, води до намаляване на силите на триене.

Първата техническа революция е свързана с откриването на колелото, защото силите на триене при търкаляне са значително по-малки от силите на триене при хлъзгане. В процеса на еволюцията природата се е изявила като „талантлив инженер“, който умело използва силите на триене в своите биологически конструкции. Например, когато ходим или бягаме, ние не се безпокоим за силите на триене в ставите. Ставите на човека и другите млекопитаещи се смазват от *синови-*

Фиг. 5-6. Ставите на човека и млекопитаещите се смазват от течност, която намалява триенето.



алната течност, която се изцежда през порите на ставните хрущали (фиг.5-6). Затова при движение триенето в ставите е малко. В покой синовиалната течност се абсорбира обратно от хрущяла и триенето рязко нараства, което спомага за поддържане на фиксираното положение.

Закони за сухото триене

Сили на триене възникват в резултат на електромагнитното взаимодействие между молекулите на триещите се повърхности. Тези молекулярни взаимодействия са сложни и все още недостатъчно изучени. Основните закономерности обаче, които характеризират сухото триене на макроскопично равнище, са установени експериментално още в 1699 г. от френския учен Амонтон, а по-късно (през 1785 г.) са изследвани по-подробно от Кулон.

Да разгледаме тяло с маса m , поставено на хоризонтална поставка. Силата на тежестта mg , която действа на тялото, се уравновесява от силата на нормална реакция на опората N и тялото се намира в покой (фиг.5-7а). Да приложим към него хоризонтална сила F и постепенно да увеличаваме нейната големина. При малки стойности на F тялото остава в покой, което показва, че между допиращите се повърхности възникват сили на триене. Поставката действа на тялото със сила на триене f_s , която е равна по големина и противоположна по посока на движещата сила F (фиг.5-7б). Силата на триене f_s се нарича *сила на триене при покой* или *сила на статично триене*. В зависимост от големината на движещата сила F силата на триене при покой може да се изменя от нула до някаква максимална стойност $f_{s \max}$. Когато силата F стане по-голяма от $f_{s \max}$, тялото започва да се движи и възниква *сила на триене при хлъзгане* f_k , която се нарича още

сила на кинетично триене. Експериментално са установени следните закономерности (законали на Амонтон – Кулон):

1. Максималната сила на триене при покой $f_{s \max}$ не зависи от площта на триещите се повърхности. Например, ако трупчето от фиг.5-7 се завърти, така че в контакт с поставката да е по-малката му стена, силата $f_{s \max}$ не се изменя.

2. За дадена двойка повърхности максималната сила на триене при покой е право пропорционална на големината на силата на нормална реакция на опората N

$$(5.4) \quad f_{s \max} = k_s N.$$

Коефициентът на пропорционалност k_s се нарича *коефициент на статично триене*. Той зависи от вида и състоянието (чистотата) на триещите се повърхности. За чисти метални повърхности k_s обикновено е в интервала от 0,3 до 1. При използване на смазочни масла той намалява. Например синовиалната течност намалява коефициента на статично триене в ставите до 0,003.

3. Силата на триене при хлъзгане f_k (кинетично триене) е по-малка от максималната сила на статично триене $f_{s \max}$. Тя не зависи от площта на триещите се повърхности и е право пропорционална на големината на силата на нормална реакция на опората N

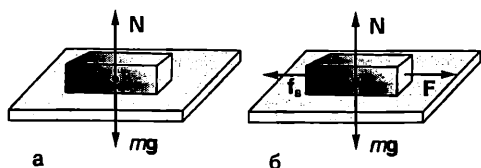
$$(5.5) \quad f_k = k_k N,$$

където k_k е коефициент на кинетично триене, който подобно на k_s зависи от вида и състоянието на триещите се повърхности.

4. Коефициентът на кинетично триене практически не зависи от скоростта на движение.

Ще отбележим, че в редица случаи разликата между коефициентите на статично и кинетично триене е малка. Затова в много от задачите по механика тя се пренебрегва и се използва един и същ коефициент на триене k – както за определяне максималната сила на триене при покой, така и на силата на триене при хлъзгане.

Фиг.5-7.



Пример 5.5. Коефициентът на триене k между две повърхности, например между книга и канцеларска гума, може да се определи по следния начин: Гумата се поставя върху книгата и книгата бавно се накланя. При определен ъгъл

на наклона $\alpha = \alpha_1$ гумата започва да се хлъзга по книгата. Определете коефициента на триене k , ако $\alpha_1 = 30^\circ$.

Решение. В задачите от движение на тяло, на което действат сили на триене, трябва да се обърне специално внимание на правилното определяне големината и посоката на тези сили.

1. Силата на триене при покой е равна по големина и противоположна по посока на равнодействащата на всички други сили, приложени към тялото. Обикновено от данните в условието на задачата може да се съобрази в каква посока тялото би започнало да се движи, ако нямаше триене – силата на триене при покой е насочена в противоположната на тази посока. Например, ако без триене тялото би започнало да се движи на изток, следва изводът, че силата на триене, която го задържа в покой, е насочена на запад.

2. Силата на триене при хлъзгане винаги е насочена в противоположна на движението (на скоростта) посока. Големината ѝ е $f = kN$. Същата формула може да се използва при пресмятане на максималната сила на триене при покой. Важен момент при решаването на задачи е определянето на големината на силата на реакция на опората N . Ще обърнем внимание, че силата на реакция е равна по големина на силата на тежестта, $N = mg$, само в частния случай, когато тялото е поставено върху хоризонтална опора и не му действат други сили, които имат вертикални компоненти (освен силата на тежестта и силата на реакция на опората). В общия случай силата на реакция N не е равна на силата на тежестта. Големината ѝ се определя от уравнението на втория принцип на механиката, което се записва по компоненти: едната координатна ос се избира успоредна на опората, а другата – перпендикулярна на опората

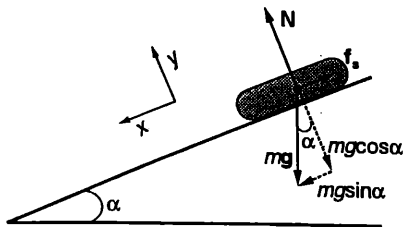
В конкретната задача на гумата действат три сили (фиг.5-8): силата на тежестта mg , силата на реакция на опората N и силата на триене при покой f_s . (Силата на триене удържа гумата в покой, т.е. тя е насочена обратно на посоката, в която гумата би започнала да се движи, ако нямаше триене.) Записваме уравнението на втория принцип на механиката

$$mg + N + f_s = ma = 0,$$

където сме отчели, че гумата е в покой, т.е. $a = 0$. Избираме правоъгълна координатна система (фиг. 5-8) и записваме горното векторно уравнение по компоненти

$$\text{по } x: mgsin\alpha - f_s = 0;$$

$$\text{по } y: -mgcos\alpha + N = 0.$$



Фиг.5-8.

От второто уравнение изразяваме силата на тежестта и я заместваме в първото уравнение. За силата на триене получаваме

$$f_s = \left(\frac{N}{\cos\alpha} \right) \sin\alpha = Mg \sin\alpha.$$

Когато ъгълът на наклона стане $\alpha = \alpha_1$, силата на триене при покой достига максималната си стойност $f_s = f_{s \max} = kN$, след което гумата започва да се хлъзга надолу. Заместваме $\alpha = \alpha_1$ и $f_s = kN$, съкращаваме на N и за коефициента на триене получаваме

$$k = \tan\alpha_1; \text{ при } \alpha_1 = 30^\circ, k = 0,58.$$

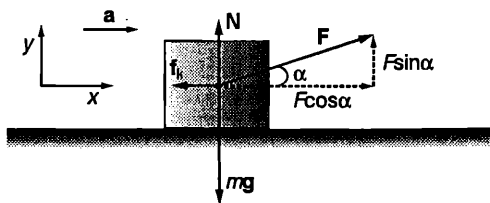
Пример 5.6. Тяло с маса m започва да се хлъзга по хоризонтална равнина под действие на сила F , която сключва ъгъл α с хоризонта. Коефициентът на триене между тялото и равнината е k . Определете ускорението на тялото.

Решение. От условието на задачата става ясно, че тялото започва да се движи по посока на хоризонталната компонента на силата F . Следователно силата на триене при хлъзгане f_k е насочена в противоположната посока (фиг. 5-9). Записваме уравнението на втория принцип на механиката за движението на тялото

$$F + mg + N + f_k = ma.$$

Избираме координатна система с ос x , насочена хоризонтално, по посока на ускорението a на тялото, и ос y , която е насочена вер-

Фиг.5-9.



тикално нагоре. Записваме уравнението на втория принцип на механиката по компоненти

$$\text{по } x: F \cos \alpha - f_k = ma;$$

$$\text{по } y: F \sin \alpha - mg + N = 0.$$

Силата на триене при хлъзгане е $f_k = kN$. От уравнението за y -компонентите изразяваме силата на реакция на опората $N = mg - F \sin \alpha$ и я заместваме във формулата за силата на триене $f_k = k(mg - F \sin \alpha)$. След това заместваме f_k в уравнението за x -компонентите и определяме ускорението

$$a = \frac{F \cos \alpha - k(mg - F \sin \alpha)}{m}.$$

Фундаментални взаимодействия

Независимо от огромното разнообразие от взаимодействия между телата, съгласно със съвременните представи всички те се свеждат до четири фундаментални взаимодействия. Това са (подреждането е направено по интензивността на взаимодействията): 1. гравитационно взаимодействие; 2. слабо взаимодействие, на което в повечето случаи се дължат процесите на разпадане и превръщане на елементарните частици; 3. електромагнитно взаимодействие; 4. силно взаимодействие между т. нар. адрони – голям клас елементарни частици, към които спадат протоните и неутроните.

Съвременните физични теории показват, че всяко взаимодействие се осъществява чрез обмен на определен вид частици (кванти), които са носители на взаимодействието. Най-добре изучено е електромагнитното взаимодействие, чиито носители са квантите на електромагнитното поле, наречени *фотони*. През 1983 г. бяха експериментално открити т. нар. *междинни векторни бозони*, които са носители на слабото взаимодействие. Понастоящем е разработена единна теория на електро-слабите взаимодействия.

Носители на силното взаимодействие са *глюоните*, частици които „слепват“ кварките – съставните частици на адроните. Една от проявите на силното взаимодействие са ядрените сили, които удържат протоните и неутроните в ядрата на атомите. Ще отбележим, че взаимодейст-

вието между отделните адрони (например между протоните и неутроните в ядрото) е само остатъчен ефект от много по-интензивното взаимодействие между техните гравитни частици – кварките, подобно на междумолекулното взаимодействие, което може да се разглежда като остатъчен ефект от електричното взаимодействие между електроните и ядрата.

Теорията предсказва два вида кванти на гравитационното взаимодействие, наречени *гравитони* и *гравитино*. Създаването на цялостна квантова теория на гравитацията се сблъсква със сериозни трудности. Гравитационните вълни и квантите на гравитационното поле все още не са експериментално регистрирани.

Правят се опити да се обединят електрослабите и силните взаимодействия (Велико обединение) и да се опишат от единна теория. Особен интерес през последните години предизвиква супергравитацията – теория, която прави опит да приложи единен подход при описване на всички взаимодействия, включително и гравитационното.

Задачи

1. Когато се допират, две еднакви еднородни кълба взаимно се привличат с гравитационна сила F . Ако кълбата се раздалечат, така че разстоянието между центровете им да стане 1 m, силата на привличане е $F/25$. Колко е радиусът на кълбата?

2. Пресметнете гравитационната сила, с която Земята привлича Луната. Масата на Земята е $6 \cdot 10^{24}$ kg, масата на Луната е $7,4 \cdot 10^{22}$ kg, а разстоянието от Земята до Луната е $3,8 \cdot 10^8$ m.

3. Колко е ускорението при свободно падане на повърхността на планета, която има същата маса, както Земята, но е с 2 пъти по-малък радиус?

4. а) Колко е ускорението на свободно падане на повърхността на планета с радиус R и средна плътност ρ ?

б) На Земята Малкият принц тежи 350 N. Колко е теглото на Малкия принц на неговата планета, която има същата плътност, както Земята, но радиусът ѝ е 100 пъти по-малък?

5. Пресметнете средната плътност на Земята ρ , ако са известни земното ускорение g , радиусът на земята R_3 и гравитационната константа γ .

6. Планетите действат с големи гравитационни сили на своите спътници. Ако разстоянието от спътника до центъра на планетата е по-малко от определена критична стойност $L_{кр}$, гравитационната сила става толкова голяма, че разрушава спътника на малки парчета. Критичното разстояние се определя по формулата $L_{кр} = 2,5R(\rho_n/\rho_c)^{1/3}$, където R е радиусът на планетата, ρ_n е плътността на планетата, а ρ_c е плътността на спътника. Учените предполагат, че е възможно пръстените на планетите гиганти да са се получили в резултат на гравитационно разрушаване на спътници.

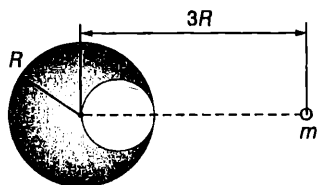
Най-близкият до Юпитер спътник Йо се движи по орбита с радиус 421 000 km. На какво разстояние Йо трябва да се доближи до центъра на Юпитер, за да се разруши на парчета? Радиусът на Юпитер е 71 000 km, а плътността му е около 3 пъти по-малка от плътността на Йо.

7. Три материални точки, всяка с маса m , са разположени във върховете на равностранен триъгълник със страна a . Определете големината на гравитационната сила, която действа на всяка една от материалните точки. Гравитационното взаимодействие с околните тела не се отчита.

8. На фиг.5-10 е показано еднородно кълбо с радиус R , в което има сферична дупка с радиус $R/2$. Масата на кълбото преди да се издълбае дупката е M . Определете гравитационната сила, с която кълбото привлича малкото топче с маса m , разположено на разстояние $3R$ от центъра на кълбото.

Указание. От гравитационната сила, с която действа плътно кълбо, извадете гравитационната сила, с която действа веществото, с което мислено запълваме сферичната дупка, за да получим плътно кълбо.

Фиг.5-10.



9. Шейна с маса m се изкачва с постоянна скорост по наклонен участък от пистата с ъгъл на наклона α . На шейната действа сила F , която е насочена нагоре, успоредно на пистата. Определете коефициента на триене между шейната и пистата.

10. Тяло се хлъзга надолу по наклонена равнина с ъгъл на наклона α . Определете ускорението на тялото, ако коефициентът на триене между тялото и наклонената равнина е k .

11. На хокейна шайба е придадена начална скорост, така че тя се хлъзга нагоре по наклонена равнина с ъгъл на наклона α . Шайбата се движи равнозакъснително с ускорение a , докато спре. След това тя започва да се спуска надолу с ускорение $a/2$. Определете коефициента на триене между шайбата и наклонената равнина.

12. По наклонена равнина с ъгъл на наклона α се спуска тяло с маса m , на което действа хоризонтална сила с големина F (фиг.5-11). Коефициентът на триене между тялото и равнината е k .

а) Определете ускорението a на тялото.

б) Пресметнете числената стойност на ускорението, ако $F = mg/4$, $k = 0,2$, $\alpha = 45^\circ$.

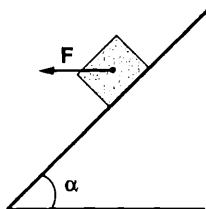
13. По наклонена равнина с ъгъл на наклона α се изкачва тяло с маса m , на което действа хоризонтална сила с големина F (фиг.5-12). Коефициентът на триене между тялото и равнината е k .

а) Определете ускорението a на тялото.

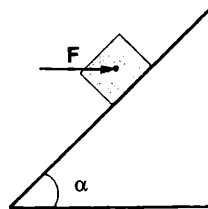
б) Пресметнете числената стойност на ускорението, ако $F = 2mg$, $k = 0,2$, $\alpha = 45^\circ$.

14. При скоростно спускане скиор с маса $m = 90$ kg се движи по склон с ъгъл на наклона $\alpha = 30^\circ$. Коефициентът на триене между скиите и снега е $k = 0,07$. Силата на съпротивление на въздуха е право пропорционална на квадрата на скоростта: $F = cv^2$, където $c = 0,7$ kg/m. Колко е максималната скорост $v_{\max}$, която може да достигне скиорът?

Фиг.5-11.



Фиг.5-12.



6. Движение в неинерциална отправна система

Досега изучавахме движението на телата спрямо инерциална отправна система, което се описва от трите принципа на механиката. На практика обаче често се налага движението да се разглежда спрямо неинерциална отправна система. Неинерциални са всички отправни системи, които се движат с ускорение спрямо дадена инерциална отправна система. Земната повърхност, както вече беше отбелязано, също е неинерциална отправна система. Ще установим връзката между кинематичните величини – скорост и ускорение, и динамичните величини – сили, които описват движението в инерциалните и в неинерциалните отправни системи.

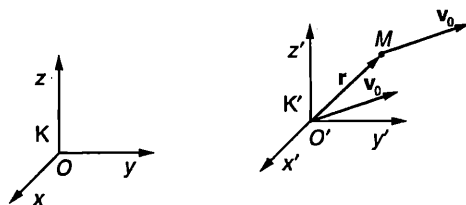
Абсолютна, относителна и преносна скорост

Нека K е инерциална отправна система, която условно ще приемем, че се намира в покой. Неинерциалната отправна система K' се движи с ускорение спрямо K . Ще разгледаме движението на материална точка M спрямо двете отправни системи (фиг.6-1). Скоростта $\mathbf{v}_a$ на материалната точка, измерена в инерциалната отправна система K , се нарича *абсолютна скорост*. Скоростта $\mathbf{v}_r$ на точката спрямо неинерциалната отправна система K' се нарича *относителна скорост*. Връзката между двете скорости се дава с векторното равенство

$$(6.1) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e,$$

където $\mathbf{v}_e$ е *преносната скорост*. За да определим преносната скорост $\mathbf{v}_e$, трябва да се абстрахираме от относителното движе-

ние на материалната точка (мислено да го прекратим). Тогава $\mathbf{v}_e$ е скоростта спрямо K -системата на геометричната точка от K' -системата, в която сме „замразили“ в дадения момент материалната точка M . Наблюдател от K -системата може да измери относителната скорост $\mathbf{v}_r$, ако мислено прекрати (замрази) преносното движение (движението на K') и по правилата на кинематиката определи $\mathbf{v}_r$. Уравнение (6.1) показва, че абсолютната скорост е геометрична сума от относителната и преносната скорост.

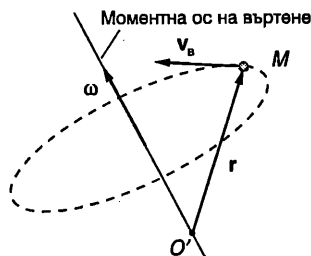


Фиг.6-2. Когато неинерциалната отправна система K' се движи постъпателно със скорост $\mathbf{v}_0$, преносната скорост на материалната точка M е $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0$.

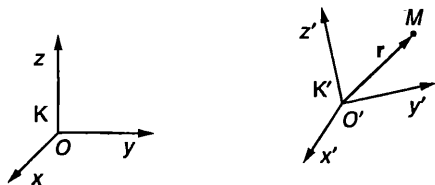
На фиг.6-2 е показан частният случай, когато системата K' се движи спрямо K постъпателно, с променлива по големина скорост $\mathbf{v}_0$. При постъпателно движение всички точки от K' се движат с еднаква скорост $\mathbf{v}_0$. Следователно преносната скорост е $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0$.

Произволно движение на неинерциалната отправна система K' може да се разглежда като съставено от две движения: постъпателно движение със скорост $\mathbf{v}_0$ и въртене с ъглова скорост ω около моментна ос, минаваща през началото O' (фиг.6-3).

Фиг.6-3.



Фиг.6-1.



Точката от K' -системата, през която в даден момент минава материалната точка M , се върти със скорост $\mathbf{v}_b = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (вж. уравнение (3.10) на стр.26), където $\mathbf{r}$ е радиус-векторът на точка M спрямо K' -системата.

Следователно при произволно движение на K' -системата преносната скорост е

$$(6.2) \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Теорема на Кориолис

Френският учен Густав-Гаспар Кориолис (1792–1843) доказва, че абсолютното ускорение $\mathbf{a}_a$ на материална точка, измерено в инерциална отправна система, е геометрична сума от относителното ускорение $\mathbf{a}_r$, преносното ускорение $\mathbf{a}_e$ и кориолисовото ускорение $\mathbf{a}_c$

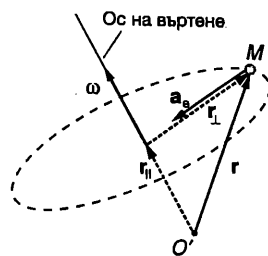
$$(6.3) \quad \mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c.$$

Уравнение (6.3) изразява теоремата на Кориолис. Относителното ускорение $\mathbf{a}_r$ се определя като се абстрахираме от преносното движение, което е равносилно да приемем K' -системата за неподвижна, и по правилата на кинематиката да определим относителното (спрямо K' -системата) ускорение $\mathbf{a}_r$ (както $\mathbf{v}_r$) на материалната точка.

Ускорението $\mathbf{a}_e$ е свързано единствено с преносното движение. Ако в дадения момент материалната точка M беше неподвижна спрямо K' -системата („замразяваме“ относителното движение), тя щеше да се движи с ускорение $\mathbf{a}_e$ спрямо K -системата. Ще определим преносното ускорение в два важни за практиката частни случая.

1. Системата K' се движи постъпателно с ускорение $\mathbf{a}_0$. При постъпателно движение всички точки от K' се движат с едно и също ускорение $\mathbf{a}_0$, т.е. $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_0$.

2. Началото O' е неподвижно или извършва праволинейно равномерно движение ($\mathbf{a}_0 = 0$), а K' -системата се върти с постоянна ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$ около ос, минаваща през началото O' (фиг.6-4). Преносното движение на геометричната точка M от K' -системата е движение по окръжност. Разлагаме нейния радиус-вектор $\mathbf{r}$ на две компоненти: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp}$, където векторът $\mathbf{r}_{||}$ е успореден, а $\mathbf{r}_{\perp}$ – перпен-



Фиг.6-4.

дикулярен на оста на въртене. Преносното ускорение $\mathbf{a}_e$ е равно на центростремителното ускорение на точка M (вж. уравнение (3.8) на стр. 25)

$$(6.4) \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}.$$

Кориолис доказва, че освен относителното и преносното ускорение съществува още едно ускорение, което зависи както от относителното, така и от преносното движение (въртене). В негова чест това ускорение е било наречено *кориолисово ускорение*. Кориолисовото ускорение $\mathbf{a}_c$ е равно на

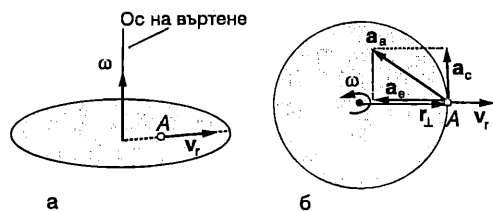
$$(6.5) \quad \mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

където $\boldsymbol{\omega}$ е ъгловата скорост, с която се върти неинерциалната отправна система, а $\mathbf{v}_r$ е относителната скорост на материалната точка.

Ще подчертаем, че трите ускорения – относително, преносно и кориолисово, на които се разлага абсолютното ускорение $\mathbf{a}_a$, се измерват от наблюдател в инерциалната отправна система K . За наблюдател от K' -системата съществува единствено ускорението $\mathbf{a}_r$.

Пример 6.1. Диск се върти с постоянна ъглова скорост $\omega = 2 \text{ rad/s}$ (фиг.6-5а). По радиален улей се търкаля малко топче с постоянна скорост $v_r = 0,75 \text{ m/s}$ спрямо улея. Определете големината a_a на абсолютното ускорение на топчето, когато то се намира на разстояние $r = 1 \text{ m}$ от центъра на диска.

Решение. Спрямо земната повърхност, която ще приемем за инерциална отправна система K , топчето извършва преносно и относително движение. Относителното движение (спрямо неинерциална отправна система K' , свързана с диска) е с постоянна скорост v_r . Следователно относителното ускорение е нула



Фиг.6-5.

($a_r = 0$). Преносното движение е въртене с постоянна ъглова скорост ω . На него съответства преносно ускорение, което е равно на центростремителното ускорение на точка A от диска с радиус-вектор r , през която в дадения момент преминава топчето: $a_e = a_n = -\omega^2 r_{\perp}$ (фиг. 6-5б). Големината на преносното ускорение е $a_e = \omega^2 r = (2 \text{ rad/s})^2 (1 \text{ m}) = 4 \text{ m/s}^2$.

Тъй като топчето извършва едновременно и преносно движение, то има кориолисово ускорение $a_c = 2\omega \times v_r$. Големината на кориолисовото ускорение е

$$a_c = 2\omega v_r = 2(2 \text{ rad/s})(0,75 \text{ m/s}) = 3 \text{ m/s}^2,$$

където е отчетоно, че векторите ω и v_r са взаимно перпендикулярни (фиг.6-5а). Посоката на вектора a_c определяме по правилото за векторно произведение (на дясната ръка). Абсолютното ускорение на топчето е $a_a = a_e + a_c$. Както се вижда от фиг. 6-5б, векторите a_e и a_c са взаимно перпендикулярни. От векторния триъгълник (фиг.6-5б) с помощта на питагоровата теорема определяме големината на абсолютното ускорение

$$a_a = \sqrt{a_e^2 + a_c^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Инерчни сили

Нека в уравнението на втория принцип на механиката, записано за движението на материална точка в инерциалната отправна система K, заместим абсолютното ускорение a_a с неговите съставлящи, съгласно с теоремата на Кориолис (6.3)

$$(6.6) \quad F = ma_a = ma_r + ma_e + ma_c,$$

където F е резултантната на всички сили, действащи на материалната точка. Записваме уравнение (6.6) във вида

$$(6.7) \quad F + (-ma_e - ma_c) = ma_r.$$

От дясната страна на равенството стои произведението от масата и относителното ускорение, т.е. ускорението на

материалната точка, измерено в неинерциалната отправна система K'. Ако K' беше инерциална отправна система, в нея щеше да е в сила вторият принцип на механиката, т.е. $ma_r = F$, където F е резултантната на всички сили. Уравнение (6.7) обаче показва, че вторият принцип не е в сила за неинерциалната система K' – в лявата страна на това уравнение освен силата F влизат и двата члена в скобите. Ако разглеждаме тези два члена като сили

$$(6.8) \quad F_e = -ma_e;$$

$$(6.9) \quad F_c = -ma_c,$$

уравнение (6.7) добива вида

$$(6.10) \quad F + F_e + F_c = ma_r.$$

Силите $F_e = -ma_e$ и $F_c = -ma_c$ се наричат *инерчни сили*. След въвеждането на инерчните сили вторият принцип на механиката може да се формулира в по-общ вид, така че да остава в сила и в неинерциална отправна система: *произведението от масата и ускорението на материална точка е равно на векторната сума от всички сили, включително и инерчните, които действат на материалната точка.*

Преносна инерчна сила при постъпателно движение

Инерчната сила $F_e = -ma_e$, която е свързана с преносното движение, се нарича *преносна инерчна сила*. Ако неинерциалната отправна система се движи постъпателно с ускорение a_0 , тогава преносното ускорение е $a_e = a_0$. Инерчната сила

$$(6.11) \quad F_e = -ma_0$$

е насочена в противоположна на ускорението a_0 посока. Например при натискане на спирачките автобусът и пътниците в него започват да се движат закъснително спрямо инерциалната отправна система, свързана със земната повърхност, с ускорение a_0 , насочено в противоположната на движението посока. Наблюдател, намиращ се край пътя, ще забележи, че предметите, които не са добре закрепени, продължават да се движат напред по инерция – някои пътници могат да си ударят главите в предните седалки. От гледна точка на наблюдател от автобуса оба-

че картината е по-различна. За него автобусът през цялото време е в покой. При натискане на спирачките възникват инерчни сили, насочени напред. Всички движения на телата вътре в автобуса се извършват под действие на инерчните сили.

Пример 6.2. Топче е закачено на нишка за тавана на кабината на самолет. Когато самолетът се засилва по пистата за излитане, нишката се отклонява на ъгъл α от вертикалата. Определете ускорението a_0 на самолета.

Решение. Най-напред ще разгледаме задачата в инерциална отправна система, свързана със земната повърхност. На топчето действат две сили: силата на тежестта mg и силата на опъване на нишката T (фиг.6-6а). Под тяхното съвместно действие топчето се движи заедно със самолета с ускорение a_0 , насочено хоризонтално. Записваме уравнението на втория принцип на механиката във векторен вид

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_0.$$

Записваме това векторното уравнение по компоненти (фиг. 6-6а):

$$\text{по } x: T\sin\alpha = ma_0; \quad \text{по } y: T\cos\alpha - mg = 0,$$

откъдето определяме големината на ускорението

$$a_0 = g\tan\alpha.$$

Нека сега преминем в неинерциалната отправна система, свързана със самолета. На топчето действат три сили (фиг.6-6б): силата на опъване на нишката T , силата на тежестта mg и преносната инерчна сила $F_e = -ma_0$. Спрямо самолета топчето е в покой. Условието за равновесие е: $T + mg + F_e = 0$. Записваме това векторно уравнение по компоненти:

$$\text{по } x: T\sin\alpha - ma_0 = 0; \quad \text{по } y: T\cos\alpha - mg = 0,$$

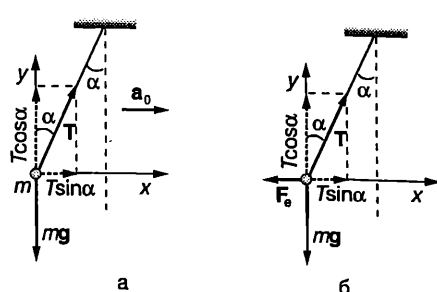
откъдето определяме ускорението $a_0 = g\tan\alpha$.

Центробежна инерчна сила

Когато неинерциалната отправна система се върти с постоянна ъглова скорост ω , преносното ускорение се изразява с уравнение (6.4): $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}_\perp$. Преносната инерчна сила в този случай е

$$(6.12) \quad \mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}_e = m\omega^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Тя е насочена навън, перпендикулярно на оста на въртене (фиг.6-7). Нарича се *центробежна сила*, тъй като се стреми да отдалечи материалната точка от оста на въртене.



Фиг.6-6.

Пример 6.3. При седиментация (утаяване) на суспензии и емулсии на частиците (червени кръвни телца, макромолекули, нуклеинови киселини, твърди частици и др.) действат силата на тежестта, архимедовата сила и силата на съпротивление, която е пропорционална на скоростта на частицата ($F_c = -kv$, където k е коефициент на пропорционалност). При нормални условия скоростта на седиментация е много малка. Тя може рязко да се увеличи, ако епруветка с емулсия (суспензия) се постави в ултрацентрифуга, въртяща се с голяма ъглова скорост.

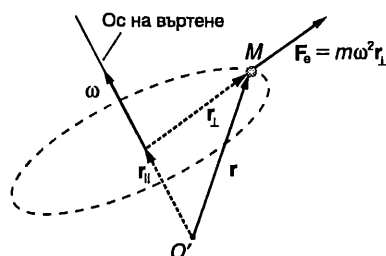
Колко пъти ще нарастне скоростта на седиментация, ако ултрацентрифугата извършва 50 000 оборота в минута? Радиусът на въртене е $r = 10$ cm.

Решение. Нека утаяването се извършва под действие на силата на тежестта. Скоростта на утаяващата се частица става постоянна, когато силата на тежестта се уравни от архимедовата сила $F_A = \rho Vg$ (ρ е плътността на дисперсионната среда, V е обемът на частицата) и от силата на съпротивление (фиг. 6-8а)

$$mg = \rho_0 Vg = \rho Vg + kv,$$

където ρ_0 е плътността на частицата. От това уравнение определяме постоянната скорост на седиментация

Фиг.6-7.



$$v = \frac{(\rho_0 - \rho)Vg}{k}$$

Да поставим сега епруветката с препарата в ултрацентрифугата. Във въртящата се неинерциална отправна система, свързана с центрофугата, на частицата действа центробежна инерчна сила $F_e = m\omega^2 r$ (фиг.6-8б), която е много по-голяма от силата на тежестта. Затова можем да пренебрегнем силата на тежестта и да смятаме, че утаяването се извършва под действие на центробежната инерчна сила. Скоростта на седиментация v_i в този случай можем да определим, като заместим в получената формула за седиментация под действие на силата на тежестта земното ускорение g с преносното ускорение $\omega^2 r$. Получаваме

$$v_i = \frac{(\rho_0 - \rho)V\omega^2 r}{k} = \frac{\omega^2 r}{g} v = 2,7 \cdot 10^5 v,$$

т.е. в ултрацентрифугата скоростта на седиментация нараства близо 300 000 пъти.

Кориолисова сила

Когато материална точка се движи спрямо въртяща се отправна система, възниква кориолисова инерчна сила

$$(6.13) \quad F_c = -ma_c = -2m\omega \times v_r = 2mv_r \times \omega.$$

Както се вижда от формула (6.13), двете необходими условие за възникване на кориолисови сили са:

1. Неинерциалната отправна система да се върти ($\omega \neq 0$).

2. Материалната точка да се движи спрямо неинерциалната отправна система ($v_r \neq 0$).

Например, ако сме неподвижни във вагон, който навлиза в завой, действа ни центробежна инерчна сила. Ако обаче в

този момент се движим по коридора, ще бъдем подложени и на действието на кориолисова сила. Затова при завой е трудно да запазим равновесие, ако се движим, отколкото ако сме в покой.

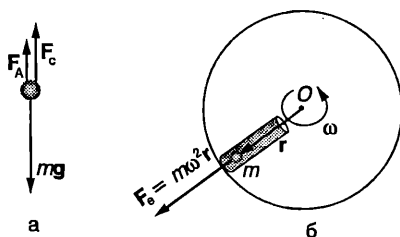
Кориолисови сили не действат, ако материалната точка се движи успоредно на оста на въртене, тъй като в този случай векторите v_r и ω са колинеарни, поради което векторното им произведение е нула. От формула (6.13) също следва, че кориолисовата сила винаги е перпендикулярна на относителната скорост.

Още веднъж специално ще подчертаем, че инерчни сили действат само в неинерциални отправни системи. Затова понякога ги наричат „фиктивни“ сили. Действително, в нютоновата механика силите са мярка за непосредственото действие на едно тяло върху друго тяло (при контакт или от разстояние) и на всяко действие съответства равно по големина и противоположно по посока противодействие. Инерчните сили обаче не описват вид взаимодействие между телата, затова може да се приемат за фиктивни сили. Може да се смята, че те изкуствено се въвеждат, за да се прилага вторият принцип на механиката и в неинерциални отправни системи. Инерчните сили „изчезват“, когато се премине в инерциална отправна система. Едновременно с това не трябва да се забравя, че за наблюдател от неинерциалната отправна система това са съвсем реални сили, които той може да измери експериментално – например с пружинни везни (динамометър).

Пример 6.4. Гладък хоризонтален диск се върти с постоянна ъглова скорост ω около вертикална ос, минаваща през неговия център. От центъра на диска започва да се хлъзга без триене малка шайба с начална скорост v_0 . Изразете големината на кориолисовата сила, която действа на шайбата в отправната система на въртящия се диск, като функция на времето t .

Решение. Тъй като няма триене, в инерциалната отправна система, свързана със земната повърхност, шайбата се движи праволинейно и равномерно със скорост $v_a = v_0$. Абсолютната скорост на шайбата е сума от относителната скорост v_r и преносната скорост $v_e = \omega \times r$, свързана с въртенето на диска. Векторите v_0 и

Фиг.6-8.



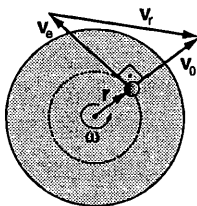
v_e са взаимно перпендикулярни (фиг.6-9). Големината на относителната скорост е $v_e = \omega r = \omega v_0 t$, където сме отчели, че за наблюдател от земната повърхност шайбата се отдалечава от центъра на диска с постоянна скорост v_0 , т.е. големината на нейния радиус-вектор се изменя по закона $r = v_0 t$. От векторния триъгълник, показан на фиг.6-9, с помощта на питагоровата теорема определяме големината на относителната скорост на шайбата

$$v_r = \sqrt{v_0^2 + v_e^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 v_0^2 t^2}.$$

Относителната скорост е успоредна на равнината на диска, т.е. тя е перпендикулярна на ъгловата скорост. Големината на кориолисовата сила, действаща на шайбата в отправната система, свързана с диска, е

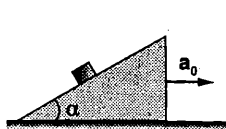
$$F_c = 2mv_r\omega = 2m\omega v_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2}.$$

Фиг.6-9.

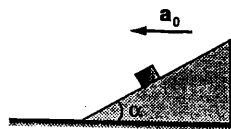


Задачи

1. Автобус се движи равноускорително на изток. Каква е посоката на инерчната сила, действаща на пътниците? В коя отправна система се измерва тази сила?
2. Реактивен самолет лети хоризонтално с постоянно ускорение. Равновесното положение на махало, закачено в кабината на пилота, е отклонено на ъгъл 45° от вертикалата. Изразете ускорението на самолета чрез земното ускорение g .
3. На пода на вагон, който се движи по хоризонтален участък от пътя с постоянно ускорение a_0 , е поставен сандък с маса m . Определете големината и посоката на силата на трие-



Фиг.6-10.



Фиг.6-11.

не при покой f_s , с която подът на вагона действа на сандъка. Решете задачата по два начина: в неинерциалната отправна система, свързана с вагона, и в инерциалната отправна система, свързана със земната повърхност.

4. С каква ъглова скорост трябва да се върти виненско колело с радиус $r = 15$ m, за да стане центробежната инерчна сила, действаща на пътниците, равна по големина на силата на тежестта? Земното ускорение приемете $g = 10$ m/s².

5. Трупче е поставено върху клин с ъгъл $\alpha = 30^\circ$, който се движи по хоризонтална равнина с ускорение a_0 (фиг.6-10). Определете коефициента на триене k между трупчето и клина, ако трупчето започва да се хлъзга по клина при големина на ускорението $a_0 = g/4$, където $g = 10$ m/s² е земното ускорение.

6. Клинът от фиг.6-11 се движи с постоянно ускорение $a_0 = g = 10$ m/s². Трупчето отначало е в покой и след това се освобождава. Надолу или нагоре по клина ще започне да се движи трупчето? Колко метра спрямо клина ще измине трупчето за 1 s след началото на движението? Триенето между трупчето и клина се пренебрегва. Ъгълът на клина е $\alpha = 30^\circ$.

7. Хоризонтален диск се върти с постоянна ъглова скорост ω около вертикална ос, минаваща през центъра му. Малко топче с маса m започва да се движи по радиален улей от центъра на диска с постоянна спрямо диска скорост v_r . Когато топчето се намира на разстояние r от центъра на диска, определете:

- а) големините на кориолисовата сила и на центробежната инерчна сила, които действат на топчето в отправната система, свързана с диска, както и големината на равнодействащата на тези две сили;
- б) големината на силата, с която улеят действа на топчето.

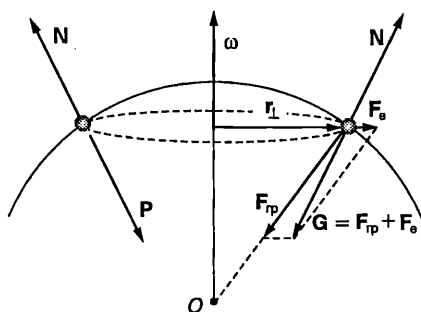
7. Земята като неинерциална отправна система

Както беше отбелязано в §4, в редица задачи по механика може да се пренебрегне денонощното въртене на Земята и нейната повърхност да се разглежда като инерциална отправна система. Тогава силата на тежестта $\mathbf{G}$, действаща на дадено тяло, е равна на гравитационната сила $\mathbf{F}_{\text{гр}}$ на привличане на тялото към Земята. Денонощното въртене на Земята оказва влияние на телата, които са в покой или се движат спрямо земната повърхност, което в някои случаи има съществено значение. За да отчетем това влияние, ще разглеждаме земната повърхност като въртяща се с ъглова скорост ω неинерциална отправна система, в която действат центробежни и кориолисови инерчни сили.

Сила на тежестта и тегло на телата

В неинерциалната отправна система, свързана със Земята, на неподвижно тяло действат три сили: гравитационната сила $\mathbf{F}_{\text{гр}}$, центробежната инерчна сила $\mathbf{F}_e$ и силата на реакция на опората $\mathbf{N}$ (фиг. 7-1). Гравитационните и инерчните сили са масови сили. Ако вземем произволен малък елемент от тялото, независимо къде се намира той – на повърхността или вътре в обема на тялото, ще му действа гравитационна сила, правопрпорционална на гравитационната маса на елемента, и инерчна сила, която е правопрпорцио-

Фиг.7-1. Силата на тежестта $\mathbf{G}$ е равна на векторната сума от гравитационната сила $\mathbf{F}_{\text{гр}}$ и центробежната инерчна сила $\mathbf{F}_e$.



нална на инертната му маса. Съгласно с принципа за еквивалентност инертната и гравитационната маса са еднакви. Това дава възможност инерчните и гравитационните сили да се разглеждат съвместно и да се даде по-прецизно определение на силата на тежестта: *Силата на тежестта за неподвижно спрямо земната повърхност тяло е равна на векторната сума от гравитационната сила и центробежната инерчна сила, обусловена от денонощното въртене на Земята, които действат на тялото (фиг.7-1)*

$$(7.1) \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_{\text{гр}} + \mathbf{F}_e.$$

Тялото и опората от фиг.7-1 взаимодействат с контактни сили на реакция $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$. Силата на нормална реакция на опората $\mathbf{N}$ е приложена към тялото. От условие за равновесие на тялото следва, че

$$(7.2) \quad \mathbf{G} + \mathbf{N} = 0$$

Силата $\mathbf{P}$ е приложена към опората. Съгласно с третия принцип на механиката тялото и опората взаимодействат с равни по големина и противоположни по посока сили, т.е.

$$(7.3) \quad \mathbf{P} = -\mathbf{N} = \mathbf{G},$$

където е отчетено уравнение (7.2).

Силата $\mathbf{P}$, с която тяло действа на опората, върху която е поставено (или опъва нишката, на която виси) се нарича *тегло на тялото*. При това се предполага, че тялото и опората (нишката) се намират в покой спрямо отправната система, в която е извършено претеглянето (е измерена силата $\mathbf{P}$). От формула (7.3) се вижда, че силата тегло $\mathbf{P}$ на тяло, което е в покой спрямо земната повърхност, съпада по големина и посока със силата на тежестта $\mathbf{G}$. Ще подчертаем обаче, че става дума за две различни сили, които, както беше посочено по-горе, имат различна природа и са приложени към различни тела: силата на тежестта е приложена към тялото, а теглото – към опората (нишката), която го удържа в покой.

Зависимост на земното ускорение от географската широчина

Силата на тежестта (7.1) е пропорционална на масата m на тялото и може да се представи във вида

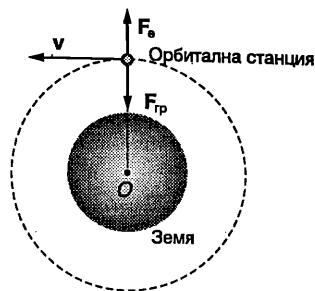
$$(7.4) \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_{\text{гр}} + \mathbf{F}_{\text{е}} = m\mathbf{g},$$

където $\mathbf{g}$ е ускорението на свободно падане (земното ускорение). Ако приемем, че Земята е еднородно кълбо, гравитационната сила $\mathbf{F}_{\text{гр}}$ е насочена към центъра на Земята, а големината ѝ не зависи от това, в коя точка от земната повърхност се намира тялото (например на полюса или на екватора). Големината на центробежната инерчна сила $\mathbf{F}_{\text{е}} = m\omega^2 r_{\perp}$ зависи от географската широчина: тя е максимална на екватора, където $r_{\perp} = R_3 = 6400 \text{ km}$ и става нула на полюса ($r_{\perp} = 0$). Поради това земното ускорение също зависи от географската широчина. То има минимална стойност $g = 9,780 \text{ m/s}^2$ на екватора, където силите $\mathbf{F}_{\text{гр}}$ и $\mathbf{F}_{\text{е}}$ са насочени в противоположни посоки, и достига максимална стойност $g = 9,832 \text{ m/s}^2$ на полюсите, където $\mathbf{F}_{\text{е}} = 0$.

И така, денонощното въртене на Земята води до зависимост на земното ускорение от географската широчина. Ще отбележим, че в действителност Земята не е идеално еднородно кълбо. Тя е сплескана към екватора – точките от земната повърхност около екватора са по-далеч от центъра на земята, отколкото полюсите. Освен това съдържа нееднородности (например големи рудни находища). Затова гравитационната сила също зависи от положението на тялото, което е причина за допълнителни различия в стойностите на земното ускорение, измерени в различни географски райони.

Безтегловност

За неподвижен спрямо земната повърхност предмет или живо същество силата на тежестта се уравновесява от силата на нормална реакция на опората. Силата на тежестта $\mathbf{G}$ е масова сила, докато силата на реакция $\mathbf{N}$ е контактна сила – тя е приложена към повърхността на тялото, която е в контакт с опората. По аналогичен начин например на всеки вътрешен орган от човешкото тяло действа сила на тежестта, която се уравновесява от силите на реакция, с които му действат съседните органи. Така вътрешните органи и части на тялото се притискат един към друг и взаимно се деформират, което създава спе-



Фиг.7-2. В отправната система на орбиталната станция гравитационната сила $\mathbf{F}_{\text{гр}}$ се уравновесява от центробежната инерчна сила $\mathbf{F}_{\text{е}}$ и космонавтите се намират в състояние на безтегловност.

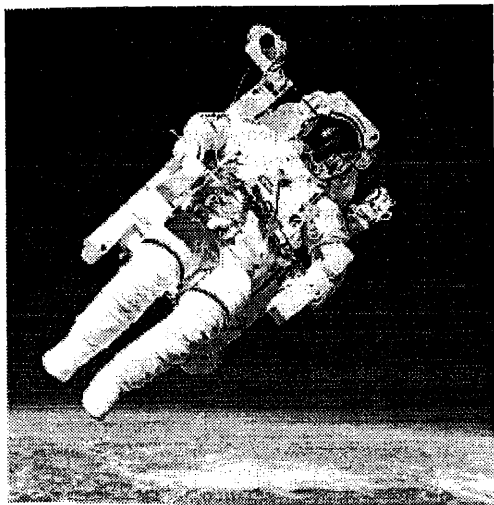
цифично физиологично усещане за тегло.

Да си представим сега, че се намираме в покой спрямо неинерциална отправна система, в която геометричната сума от всички масови сили (гравитационни и инерчни) е равна на нула. В този случай силите на реакция също са нула, т.е. вътрешните органи и части на тялото не се притискат един към друг – усещането за тегло се заменя с особеното чувство за безтегловност.

От гледна точка на наблюдател от инерциална отправна система състояние на безтегловност се реализира при свободно падане в гравитационно поле. Тогава на тялото не действат външни сили на реакция, а всички негови части се движат с еднакво ускорение $\mathbf{g}$ (ускорение на свободно падане), породено единствено от гравитационната сила. При такова движение между съседните части на тялото не възникват сили на реакция (натиск или опъване) и те не се деформират.

Състояние на безтегловност се получава например при космически полети по околоземна орбита. От гледна точка на наблюдател от неинерциалната отправна система (орбиталната станция) гравитационната сила $\mathbf{F}_{\text{гр}}$ се уравновесява от центробежната инерчна сила $\mathbf{F}_{\text{е}}$ (фиг.7-2). За наблюдател от инерциалната отправна система, свързана с „неподвижните звезди“, орбиталната станция през цялото време се намира в състояние на свободно падане в гравитационното поле на Земята.

Независимо, че в условие на безтег-



Фиг.7-3. На 7 февруари 1984 година американският астронавт Брус Маккандлес се отделя от космическата совалка и преминава на самостоятелна орбита на височина 102 km над земната повърхност. Астронавтът се намира в състояние на безтегловност.

ловност се изменят редица жизнени функции, специални тренировки и профилактични мерки позволяват космонавтите да живеят и работят продължително време при такива условия.

Пример 7.1. Момиче с маса 50 kg се претегля на медицински везни, поставени в асансьор. В каква посока и с какво ускорение се движи асансьорът, ако везните показват 40 kg? Земното ускорение да се приеме за 10 m/s^2 .

Решение. Скалата на везните е в килограми, но в действителност те измерват теглото, т.е. силата на натиск, който в случая момичето упражнява върху везните. Теглото на тяло, което е в покой спрямо земната повърхност, е $P = mg$ (съвпада по големина и посока със силата на тежестта). Когато отправната система, в която се извършва претеглянето, се движи спрямо земната повърхност с ускорение a , теглото е еднакво по големина и посока с резултантната от силата на тежестта и инерчната сила

$$P' = mg + F_e = m(g - a).$$

Тъй като в движещия се асансьор теглото на момичето намалява ($P' < P$), може да се направи изводът, че векторите g и a са едно-

посочни, т.е. ускорението на асансьора е насочено вертикално надолу. Като използваме данните от условието, получаваме

$$\frac{P'}{P} = \frac{m(g - a)}{mg} = \frac{40 \text{ kg}}{50 \text{ kg}},$$

откъдето определяме големината на ускорението на асансьора

$$a = g/5 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Забележка. В направеното разглеждане се предполага, че отправната система, свързана със земната повърхност, е инерциална и силата на тежестта е равна на гравитационната сила, действаща на телата в асансьора. По-детайлният анализ, който отчита въртенето на Земята около нейната ос и свързаните с това въртене инерчни сили (центробежни и кориолисови), е сложен и в повечето случаи води до пренебрежимо малки поправки.

Пример 7.2. На пода на асансьор е закрепен затворен цилиндър с вода, на дъното на който е потопено оловно топче. Установявате, че в даден момент топчето се откъсва от дъното, достига горната основа на цилиндъра и се притиска към нея. Какъв извод можете да направите от тези наблюдения?

Решение. Резултатната от силата на тежестта и инерчната сила, които действат на тяло с маса m в асансьора, е

$$G' = mg + F_e = m(g - a) = mg'.$$

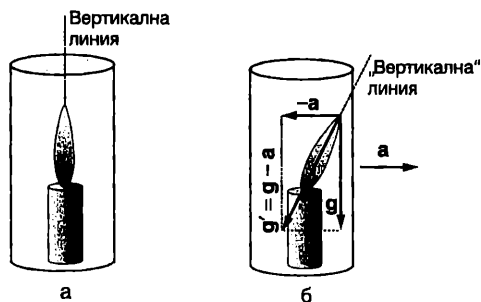
Подобни задачи от хидростатика в неинерциални отправни системи, които се движат постъпателно с постоянно ускорение a , е най-лесно да се „пренесат“ на планета, където ускорението на свободно падане е

$$g' = g - a,$$

т.е. земното ускорение g да се замени с ефективно ускорение g' . След това се прилагат законите на хидростатиката в познатия им от училищния курс по физика вид.

В случая, за да се притиска оловното топче към горната основа на цилиндъра, трябва ефективно ускорение g' да е насочено вертикално нагоре. Това се постига, когато ускорението на асансьора е насочено надолу и е по-голямо от земното ($a > g$).

Пример 7.3. Запалена свещ е поставена на дъното на дълбок стъклен цилиндър (фиг.7-4а). Как ще е насочен пламъкът на свещта, ако цилиндърът започне да се движи хоризонтално с ускорение a ?



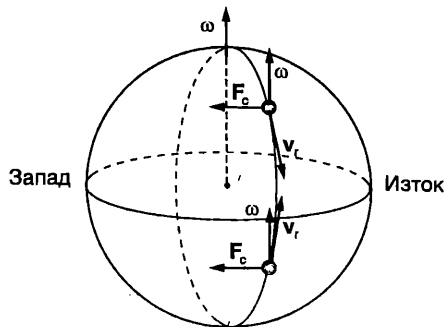
Фиг.7-4.

Решение. Задачата се решава най-лесно, ако се използва описаният в Пример 7.2 подход. Посоката на ефективното ускорение $\mathbf{g}'$ в неинерциалната отправна система, свързана със стъкления цилиндър, е показана на фиг.7-4б. Векторът $\mathbf{g}'$ определя и посоката на "вертикалната". Пламъкът ще се издига "вертикално" нагоре, т.е. ще се наклони напред.

Кориолисови сили

Когато едно тяло се движи спрямо земната повърхност, освен центробежната инерчна сила му действа и кориолисова сила (вж. уравнение (6.13) на стр.46) $\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega}$, където $\mathbf{v}_r$ е относителната скорост на тялото (спрямо Земята), а $\boldsymbol{\omega}$ е ъгловата скорост на въртене на Земята около нейната ос. Под действие на кориолисовата сила движещите се тела се отклоняват в направление, перпендикулярно на относителната скорост $\mathbf{v}_r$, или оказват натиск върху преградите, които не позволяват такова отклонение. За тела, които се движат към екватора (фиг.7-5), кориолисовата сила $\mathbf{F}_c$ е насочена на запад. Ако телата се движат към полюсите, $\mathbf{F}_c$ е насочена на изток. Обърнете внимание, че и в двата случая в северното полукуълбо $\mathbf{F}_c$ е насочена надясно спрямо посоката на движение, а в южното полукуълбо – наляво. Затова на реките в северното полукуълбо под действие на кориолисовите сили се подронват десните брегове, а на реките в южното полукуълбо – левите брегове.

Кориолисовите сили също така водят до отклоняване на свободно падащите тела на изток. Действието на кориолисовите сили се отчита при пресмятане траекториите на ракети и далекобойни снаряди, движението на жирографи и др.



Фиг.7-5. Посоката на кориолисовата сила $\mathbf{F}_c$ се определя по правилото на дясната ръка.

Пример 7.4. Тяло е пуснато без начална скорост от височина $h = 400$ m над екватора. В каква посока и на какво разстояние ще се отклони тялото от вертикалната линия преди да падне на земята? Съпротивлението на въздуха и зависимостта на земното ускорение от височината да не се отчитат.

Решение. Записваме уравнението за движение на тялото в неинерциална отправна система, свързана със земята

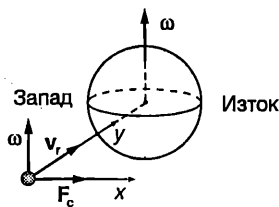
$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_{rp} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c,$$

където $\mathbf{a}_r$ е относителното (спрямо земната повърхност) ускорение на тялото, m е неговата маса, $\mathbf{F}_{rp}$ е гравитационната сила, $\mathbf{F}_e$ – преносната (центробежна) инерчна сила, а $\mathbf{F}_c$ е кориолисовата сила. Заместваме $\mathbf{F}_{rp} + \mathbf{F}_e = m\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega}$, съкращаваме масата m и получаваме

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} + 2\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega},$$

където $\mathbf{v}_r$ е относителната скорост на тялото (спрямо земната повърхност), а $\boldsymbol{\omega}$ е ъгловата скорост на въртене на Земята.

За да се определи траекторията на тялото, трябва да се реши полученото векторно уравнение (при $\mathbf{g} = \text{const}$), което, записано по компоненти, представлява система от три линейни диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти (ще напомним, че компонентите на ускорението $\mathbf{a}_r$ и на скоростта $\mathbf{v}_r$ на материална точка са съответно втори и първи производни на нейните координати x , y и z по времето t). Задачата може обаче да се реши елементарно, като се използва приближение, което значително я опростява, а същевременно дава достатъчно точен количествен резултат за основния ефект, предизвикан от кориолисовата сила – отклонението на тялото на изток.



Фиг.7-6. Под действие на кориолисовата сила падащите тела се отклоняват на изток.

Тъй като при свободното падане определяща роля има силата на тежестта, а кориолисовата сила внася само малка поправка към ускорението a_r , можем с приближение да смятаме, че относителната скорост v_r през цялото време е насочена вертикално надолу (успоредно на земното ускорение g). Тогава кориолисовата сила винаги ще е насочена на изток (фиг. 7-6). Движението на тялото с приближение може да се разглежда като сума от две прости движения: свободно падане вертикално надолу с ускорение $a_y = g$ и хоризонтално движение на изток с ускорение $a_x = 2\omega v_r$. При вертикалното движение скоростта се променя по закона $v_r = gt$ и тялото достига зем-

ната повърхност за време $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Хоризонталното движение е с променливо ускорение. За време dt тялото изминава разстояние $dx = v_x dt$. От друга страна

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = 2\omega v_r = 2\omega gt,$$

откъдето определяме скоростта v_x

$$v_x = \int 2\omega g t dt = \omega g t^2 + C.$$

От началното условие $v_x = 0$ при $t = 0$ следва, че константата C е равна на нула. Заместяваме v_x в уравнението $dx = v_x dt$ и след интегриране получаваме

$$x = \int \omega g t^2 dt = \frac{1}{3} \omega g t^3 + C.$$

При $t = 0$ хоризонталното отклонение е нула ($x = 0$), откъдето следва, че $C = 0$. Заместяваме в полученото равенство времето на

полета $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ и получаваме търсеното отклонение на тялото на изток

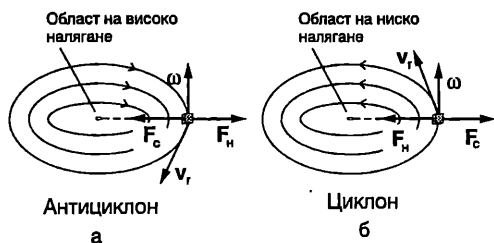
$$x = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2}{3} \frac{2\pi}{24(3600 \text{ s})} (400 \text{ m}) \sqrt{\frac{2(400 \text{ m})}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 0,18 \text{ m}.$$

Независимо че ефектът е малък, той е бил експериментално наблюдаван още в средата на 19. век в опити с падащи тела в дълбоки шахти.

Влияние на кориолисовите сили върху процесите в атмосферата

Движението на въздуха от атмосферата се извършва под действие на различни сили: сила на тежестта, сили на натиск, дължащи се на изменението на налягането във вертикално и в хоризонтално направление, сили на вътрешно триене между въздушни слоеве, които се движат с различна скорост, и инерчни сили. Ще се ограничим с разглеждането на хоризонтален въздушен поток, когато всички сили, действащи във вертикално направление се уравновесяват (това са силата на тежестта и вертикалната сила на натиск). Когато скоростта е малка, силите на вътрешно триене могат да се пренебрегнат. Тогава в отправна система, свързана със земята, на всеки малък обем с маса m от въздушния поток действат две хоризонтални сили: силата на натиск F_n , дължаща се на изменението на налягането в хоризонтално направление, и кориолисовата сила $F_c = 2m\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega}$.

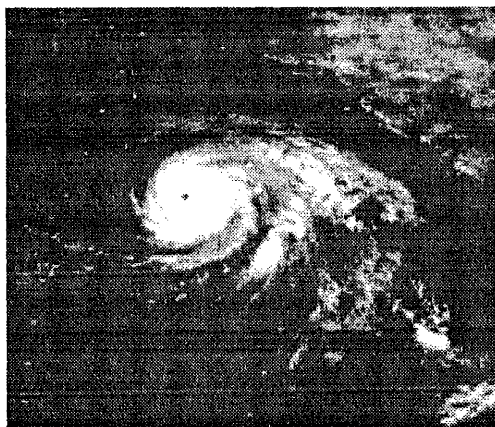
При установили се бавни криволинейни хоризонтални движения на въздушните маси се постига приблизителен баланс на кориолисовите сили и силите на натиск. Разликата в техните големина е много малка и определя закривяването на траекторията. Типичен пример в това отношение са циклоните и антициклоните. На метеорологичните карти циклоните (области на ниско налягане) и антициклоните (области на високо налягане) се представят с изобари – криви, които са геометрично място на точки с еднакво налягане. Силите на натиск F_n са перпендикулярни на изобарите и са насочени от областите на високо налягане към областите на ниско налягане (фиг.7-7). Корио-



Фиг.7-7.

лисовата сила, която балансира силата на натиск, трябва да е насочена в противоположна на силата F_n посока. По правилото на дясната ръка определяме, че кориолисовата сила изпълнява това условие, ако скоростта v_r на разглеждания обем въздух е насочена по допирателната към съответната изобара. Следователно за северното полукуълбо движението на въздушните маси се извършва по изобарите по посока на часовата стрелка за антициклоните (фиг.7-7а) и в обратна на часовата стрелка посока за циклоните, т.е. и в двата случая областта на високо налягане се намира отдясно на въздушния поток. В южното полукуълбо е обратно: областта на високо налягане е отляво на въздушния поток, т.е. за антициклона движението на въздушните маси е в обратна на часовата стрелка посока, а за циклона

Фиг.7-8. Спътникова снимка на циклон в северното полукуълбо. Въздушните маси се движат обратно на часовата стрелка около центъра на циклона, който представлява област на ниско налягане.



– по часовата стрелка. Тези изводи се потвърждават от метеорологични наблюдения и спътниковите снимки (фиг.7-8).

Задачи

1. Определете разликата Δg , свързана с въртенето на Земята, между земното ускорение на: а) полюса и екватора; б) полюса и точка с географска широчина $\theta = 45^\circ$.

Земята има радиус $R_3 = 6,37 \cdot 10^6$ m и се върти около оста си с период $T = 8,64 \cdot 10^4$ s.

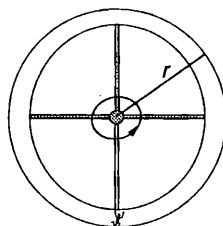
2. В научнофантастичен разказ се предлага идеята за създаване на изкуствена гравитация на космически кораб, подобна на земната ($g = 9,8$ m/s²). Корабът има форма на велосипедно колело с външен радиус $r = 30$ m (фиг.7-9). Какъв трябва да е периодът на въртене на кораба около неговата ос?

3. Топче с радиус g виси на нишка с дължина L и се опира във вертикален цилиндър с радиус R . Цилиндърът и точката на окачване на нишката са закрепени на оста на центробежна машина (фиг. 7-10). При каква ъглова скорост ω на въртене на системата силата на натиск на топчето върху стената на цилиндъра става равна на нула?

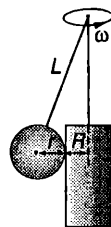
4. Защо мостовите са изпъкнали, а не са плоски или вдлъбнати? За да отговорите на този въпрос, решете следната задача: Камion с маса $m = 1 \cdot 10^4$ kg се движи с постоянна скорост $v = 72$ km/h по мост, който представлява дъга от окръжност с радиус $r = 150$ m. Определете силата на натиск (теглото) P на камiona върху моста, когато се намира по средата на моста, ако мостът е: а) изпъкнал; б) вдлъбнат.

5. Ракета лети със скорост $v_r = 1500$ m/s по траектория, която с приближение може да се приеме за хоризонтална права. Географската широчина е $\theta = 45^\circ$. Ракетата трябва да порази цел, намираща се на разстояние $s = 50$ km. Определете страничното отклонение Δx , предизвикано от въртенето на Земята.

Фиг.7-9.



Фиг.7-10.



8. Работа и кинетична енергия

За описване движението и взаимодействието на телата се използват два подхода: 1. *динамичен подход* – разглеждат се силите, действащи на телата, и непосредствено се прилагат трите принципа на механиката; 2. *енергетичен подход* – проследява се изменението на механичната енергия на телата в резултат на работата, която извършват приложените към тях сили. Трябва да се подчертае, че енергетичният подход в механиката също се основава на трите принципа на Нютон и по същество не съдържа нови физични идеи. Законът за запазване на механичната енергия може да се изведе като следствие от принципите на механиката. Във Вселената обаче енергията се среща в различни форми: механична енергия, електромагнитна енергия, вътрешна (топлинна енергия), химична енергия, ядрена енергия. Тя може да се преобразува от една форма в друга форма и да преминава от едно тяло (или система) в друго тяло (система), но нейното общо количество винаги остава едно и също. Запазването на енергията е един от най-общите физични принципи, валиден за всички физични, химични, биологични и други процеси.

Ще дадем определение на величините работа, мощност и енергия и ще установим връзката между работата и различните видове енергия на една механична система.

Работа на постоянна сила при праволинейно движение

Тяло (материална точка) се движи праволинейно. На тялото действа постоянна по големина и посока сила F , включваща ъгъл α с посоката на движение. За определен интервал от време тялото извършва преместване x (фиг.8-1а). Величината

$$(8.1) \quad A = F \cdot x = |F||x| \cos \alpha,$$

равна на скаларното произведение на силата по преместването, се нарича *работа* на силата. Тя се представя също във вида

$$(8.2) \quad A = F_t s,$$

където $F_t = |F| \cos \alpha$ е компонентата на вектора F , която е успоредна на преместването x (фиг.8-1а). При праволинейно движение в една посока големината на преместването е равна на изминатия път: $s = |x|$. За разлика от силата и преместването, работата е скаларна величина, която може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Работата е положителна, когато посоката на силата сключва остър ъгъл ($\alpha < 90^\circ$) с посоката на преместването. При $\alpha > 90^\circ$ $\cos \alpha < 0$ и работата е отрицателна. Когато силата е перпендикулярна на преместването ($\alpha = 90^\circ$), тя не извършва работа: $A = |F||x| \cos 90^\circ = 0$.

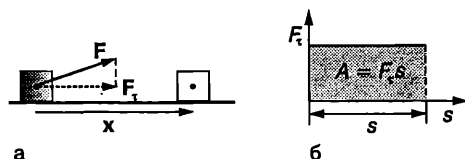
От определението (8.1) за механична работа непосредствено следва, че една сила може да извърши работа, само ако тялото (материална точка), към което е приложена, се премества. Ако едно тяло е в покой, нито една от приложените към него сили не извършва работа. Например, ако натискаме с ръка неподвижна стена, няма да извършим механична работа, независимо от голямото мускулно усилие, което прилагаме.

Единицата за работа се нарича *джаул*. Съгласно с уравнение (8.1) един джаул (1J) е работата, която извършва постоянна сила с големина един нютон (1 N), насочена успоредно на преместването, при преместване на тяло на един метър (1 m):

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

На фиг.8-1б е показана графиката на успоредната на преместването компонента F_t на силата като функция от изминатия път s . Площта на заштрихования правоъгълник е $F_t s = A$. Следователно работата A на постоянна сила при праволинейно движение се представя графично с площта на правоъгълника, образуван от абсцисната ос (ос на изминатия път s), графиката

Фиг. 8-1.



на компонентата F_τ на силата и перпендикулярните, издигнати от началното и крайното положение на материалната точка.

Работа на променлива сила

Сега ще разгледаме общия случай, когато материална точка се движи по криволинейна траектория. Елементарното преместване dr , което точката извършва за безкрайно малък интервал от време dt , е насочено по допирателната към траекторията. На материалната точка действа сила F (фиг.8-2). Величината

$$(8.3) \quad dA = F \cdot dr$$

се нарича елементарна работа на силата F , извършена при елементарното преместване dr . Да разложим силата F на две компоненти, насочени съответно по тангентата и по нормалата към траекторията: $F = F_\tau + F_n$. Компонентата F_n , която е перпендикулярна на елементарното преместване dr , не извършва работа. Следователно елементарната работа е

$$(8.4) \quad dA = F_\tau \cdot dr = F_\tau |dr| = F_\tau ds,$$

където сме отчели, че модулът на елементарното преместване е равен на изминатия път ds . На фиг.8-3 е представена графично тангенциалната компонента F_τ на силата като функция на пътя s . Ако разбием пътя s , изминат между точките 1 и 2, на елементарни участъци с дължина ds , тогава елементарната работа за всеки от тях графично се представя с площта $dA = F_\tau ds$ на един малък правоъгълник (фиг.8-3). Цялата работа A_{12} на силата F на разглеждания участък 1 – 2 от траекторията се получава като се сумират елементарните работи, т.е. площите на всички малки правоъгълници. Тяхната обща площ (работата A_{12}) е равна на площта на фигурата, образувана от графиката на функцията $F_\tau(s)$, абсцисната ос s и перпендикулярите, из-

дигнати от началната точка s_1 и крайната точка s_2 . Аналитично работата A_{12} се задава с определения интеграл

$$(8.5) \quad A_{12} = \int_1^2 F \cdot dr = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds,$$

пресметнат по траекторията на материалната точка.

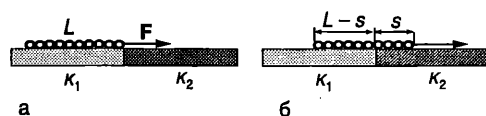
Когато на материална точка действат едновременно няколко сили $F_1, F_2, \dots, F_n$, общата работа е сума от работата на всяка една от силите: $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Работата е положителна в тези участъци от траекторията, където векторът на елементарното преместване dr и компонентата F_τ на силата имат еднакви посоки. Когато векторите dr и F_τ са с противоположни посоки, работата е отрицателна.

Пример 8.1. Еднородна верига с маса m и дължина L е поставена перпендикулярно на границата на две хоризонтални опори (фиг. 8-4а). Коефициентите на триене между веригата и опорите са съответно k_1 и k_2 ($k_1 < k_2$). Определете минималната работа, която трябва да извърши хоризонтална сила, за да изтегли веригата от едната опора върху другата опора.

Решение. Работата е минимална, когато хоризонталната сила F е равна по големина на силата на триене при хлъзгане f_k . Да означим с s дължината на тази част от веригата, която в даден момент вече е преминала върху втората опора (фиг.8-4б). Резултантната сила на триене е сума от силите на триене, действащи на двете части на веригата

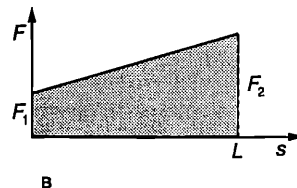
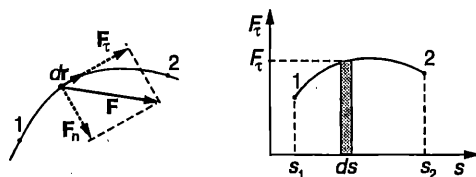
$$f_k = f_{k1} + f_{k2} = k_1 g \frac{m}{L} (L - s) + k_2 g \frac{m}{L} s,$$

Фиг.8-4.



Фиг.8-2.

Фиг.8-3.



където $\frac{m}{L}(L-s)$ и $\frac{m}{L}s$ са масите на двете части

на веригата. Следователно силата на триене и движещата сила са линейна функция на s . Големината на силата F се изменя от $F_1 = f_{k1} = k_1 mg$ при $s = 0$, когато веригата лежи изцяло върху първата опора, до $F_2 = f_{k2} = k_2 mg$ при $s = L$, когато веригата изцяло е преминала върху втората опора. Графиката на функцията $F(s)$ е показана на *фиг.8-4в*. Ще определим работата графично – тя е равна на площта на сивия трапец от *фиг.8-4в*

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2} L = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) mgL.$$

Пример 8.2. Самолет, който се засилва по пистата за излитане, се движи равноускорително с ускорение a . Представете работата на силата на съпротивление на въздуха F като функция на скоростта на самолета. Силата F е пропорционална на квадрата на скоростта: $F = -Cv^2$, където C е положителна константа. Знакът минус показва, че силата на съпротивление е насочена обратно на скоростта.

Решение. Елементарната работа на променливата сила F е

$$dA = F \cdot dr = -Cv^2 ds.$$

При равноускорително движение без начална скорост $s = v^2/2a$ (вж. Пример 1.4 на стр.14). Диференцираме двете страни на това равенство и получаваме: $ds = v dv/a$. Заместваме ds във формулата за елементарната работа и интегрираме в граници от $v = 0$ до моментната скорост v

$$A = -\int_0^v \frac{Cv^3}{a} dv = -\frac{Cv^4}{4a}.$$

Знакът минус показва, че силите на съпротивление на въздуха извършват отрицателна работа, тъй като са насочени в потивоположната на скоростта (преместването) посока.

Мощност

Величината

$$(8.6) \quad P = \frac{dA}{dt},$$

т.е. работата, извършена за единица време, се нарича *мощност*.

Единицата за мощност е *ват* (W). Съгласно с уравнение (8.6) мощността е един ват (1 W), когато за време една секунда (1 s) се извършва работа един джа-

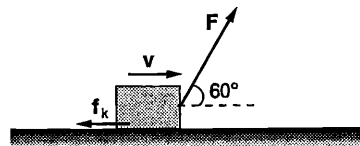
ул (1 J), т.е. $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.

Заместваме елементарната работа dA от уравнение (8.3) в (8.6) и получаваме

$$(8.7) \quad P = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot v,$$

където сме отчели, че $\frac{dr}{dt} = v$ е скоростта на материалната точка. Следователно мощността е равна на скаларното произведение на действащата силата по скоростта на материалната точка.

Пример 8.3. Трупче се хлъзга по хоризонтална равнина (*фиг.8-5*). Определете мощностите на силата F и на силата на триене f_k в момента, когато скоростта на трупчето е $v = 2 \text{ m/s}$. Големините на двете сили са $F = 3 \text{ N}$ и $f_k = 1 \text{ N}$. Колко вата е в този момент общата мощност на всички сили, приложени към трупчето?



Фиг.8-5.

Решение. Моментната мощност на силата F е

$$P_1 = F \cdot v = Fv \cos 60^\circ = 3 \text{ W}.$$

Моментната мощност на силата на триене е

$$P_2 = f_k \cdot v = f_k v \cos 180^\circ = -2 \text{ W}.$$

На трупчето действат още две сили: силата на тежестта g и силата на нормална реакция на опората N . Те обаче са насочени перпендикулярно на скоростта v на трупчето, поради което тяхната работа и мощност е нула. Следователно общата мощност на всички сили, действащи на трупчето е

$$P = P_1 + P_2 = 3 \text{ W} - 2 \text{ W} = 1 \text{ W}.$$

Кинетична енергия

Материална точка с маса m извършва криволинейно движение под действие на сила F . Разлагаме силата F на две (тангенциална и нормална) компоненти (*фиг.8-2*). Съгласно с втория принцип на механиката $F_t = ma_t$, където a_t е тангенциалното ус-

корение на материалната точка. В уравнение (8.5) заместваме $F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$ (вж. уравнение (2.19 на стр.21) и пресмятаме работата на силата F , когато материалната точка се придвижва по траекторията от положение 1 до положение 2

$$(8.8) \quad A = \int_1^2 \left(m \frac{dv}{dt} \right) ds = \int_{v_0}^v m v dv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

където $ds/dt = v$ е големината на моментната скорост, а v_0 и v са съответно големините на скоростта в началната точка 1 и в крайната точка 2.

Величината

$$(8.9) \quad E_k = \frac{mv^2}{2}$$

се нарича *кинетична енергия* на материалната точка. Кинетичната енергия е равна на половината от произведението на масата m на тялото и квадрата на скоростта му v . Измерва се в същите единици, както работата – в джаули (J). Тя е скаларна величина, която винаги има положителни стойности или е равна на нула, ако тялото е в покой.

Уравнение (8.8) може да се запише във вида

$$(8.10) \quad A = E_k - E_{k0} = \Delta E_k.$$

Полученото уравнение изразява закона за изменение на кинетичната енергия, който гласи:

Изменението на кинетичната енергия на едно тяло (материална точка) е равно на работата на равнодействащата на всички сили, приложени към тялото

Уравнение (8.10) се записва също така във вида

$$(8.11) \quad E_k = E_{k0} + A$$

Следователно крайната кинетична енергия E_k е равна на началната кинетична енергия E_{k0} плюс работата A , извършена върху тялото. Ако в началния момент тялото е в покой ($v_0 = 0$ и $E_{k0} = 0$), а в крайния момент се движи със скорост v и има кинетична енергия $E_k = mv^2/2$, уравнение (8.11) получава вида

$$(8.12) \quad E_k = mv^2/2 = A.$$

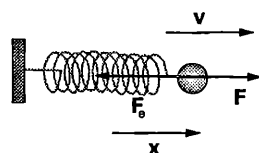
Следователно кинетичната енергия е равна на работата, която трябва да се извърши от външна сила, за да се ускори едно тяло от покой до скорост v .

Предаване и преобразуване на енергията

С помощта на уравнение (8.11) ще проследим как се изменя кинетичната енергия на едно тяло в резултат на взаимодействие му с други тела. Когато силите, приложени към тялото, извършват положителна работа ($A > 0$), от уравнение (8.11) следва, че кинетичната енергия на тялото нараства ($E_k > E_{k0}$) и то започва да се движи с по-голяма скорост. Например при тласкане на гюлле атлетът извършва положителна работа чрез силата, с която действа на гюллето: гюллето се ускорява и кинетичната му енергия нараства. Процесът на взаимодействие между атлета и гюллето може да се разглежда като процес на обмяна на енергия: атлетът предава енергия на гюллето посредством положителната работа, която той извършва.

Когато извършената върху тялото работа е отрицателна ($A < 0$), от уравнение (8.11) следва, че кинетичната му енергия намалява ($E_k < E_{k0}$) и то забавя движението си. Ще се спрем на този случай по-подробно, като анализираме примера, показан на *фиг. 8-6*. На топчето е придадена начална скорост v_0 (начална кинетична енергия $E_{k0} = mv_0^2/2$). То започва да се движи и да разтяга пружината, към която е закрепено. Еластичната сила F_e , с която пружината действа на топчето, е насочена обратно на посоката на неговото преместване x и пружината извършва отрицателна работа $A_{np} < 0$. Силата F , с която топчето действа на пружината, обаче е насочена по посока на преместването на края на пружината, поради което работата A_t на топчето е положителна ($A_t > 0$).

Фиг.8-6.



По модул отрицателната работа $A_{\text{пр}}$ на пружината е равна на положителната работа A , на топчето (съгласно с третия принцип на механиката силите $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_e$ са равни по големина и противоположни по посока). Тялото, което извършва положителна работа, отдава енергия, а тялото, което извършва отрицателна работа – приема тази енергия. В случая топчето извършва положителна работа за сметка на кинетичната си енергия: топчето отдава кинетичната си енергия, която в резултат на извършената от него положителна работа за разтягането на пружината се преобразува в енергия на деформираната пружина.

И така, телата притежават енергия на движението (кинетична енергия). Тя нараства, когато външни сили извършват положителна работа върху телата. Движещите се тела също могат да извършват положителна работа върху околните тела за сметка на своята кинетична енергия.

Пример 8.4. Куршум с маса $m = 10 \text{ g}$, който лети със скорост $v_0 = 500 \text{ m/s}$, пробива дъска и излиза от нея със скорост $v = 200 \text{ m/s}$. Колко джаула е работата на силата, с която дъската действа на куршума? Колко джаула е работата, извършена от куршума?

Решение. Дъската действа на куршума със сила $\mathbf{F}$, която е много по-голяма от силата на тежестта. Затова можем да пренебрегнем силата на тежестта през времето, за което куршумът пробива дъската, и да смятаме, че $\mathbf{F}$ е единствената сила, действаща на куршума. По време на движението на куршума в дъската големината на силата $\mathbf{F}$ се изменя по сложен и неизвестен за нас начин. Независимо от това лесно можем да определим нейната работа с помощта на закона за изменението на кинетичната енергия:

$$A = E_k - E_{k0} = mv^2/2 - mv_0^2/2 = -1050 \text{ J}.$$

Дъската извършва отрицателна работа върху куршума и намалява кинетичната му енергия. Куршумът от своя страна извършва положителна работа $A' = -A = 1050 \text{ J}$, за което изразходва част от кинетичната си енергия.

Задачи

1. Тяло, което се движи праволинейно, изминава разстояние $s = 50 \text{ cm}$ под действие на постоянна сила с големина $F = 20 \text{ N}$. Определете работата на силата $\mathbf{F}$, ако тя сключва с посоката на преместването ъгъл: а) 60° ; б) 90° ; в) 120° ; г) 180° .

2. Тяло с маса $m = 1 \text{ kg}$ се движи по хоризонтална равнина под действие на постоянна сила с големина $F = 10 \text{ N}$. Коефициентът на триене между тялото и равнината е $k = 0,2$. Определете работата на силата на триене при преместване на тялото $s = 1 \text{ m}$, ако силата $\mathbf{F}$ е насочена: а) хоризонтално; б) под ъгъл $\alpha = 30^\circ$ спрямо хоризонта.

3. С каква скорост кран с мощност 4 kW може да издигне товар с маса 1 t ?

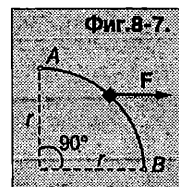
4. Космонавт, който извършва изследвания извън космическия кораб, е снабден с малък реактивен двигател. Космонавтът извършва маневра, при която увеличава скоростта си (спрямо кораба) от 1 m/s на 2 m/s . Колко работа извършва двигателят, ако масата на космонавта заедно с екипировката му е 100 kg ?

5. Шейна се движи праволинейно по хоризонтален участък от пътя под действие на сила $F = 100 \text{ N}$, която сключва ъгъл $\alpha = 60^\circ$ с хоризонта. Когато шейната изминава разстояние $s = 5 \text{ m}$, кинетичната ѝ енергия нараства с $\Delta E_k = 100 \text{ J}$. Определете големината на силата на триене, действаща на шейната.

6. На частица, която се движи по оста x , действа сила $\mathbf{F}$, насочена в положителната посока на оста x . Големината на силата се изменя по закона $F = F_0 e^{-x/a}$, където $F_0 = 2 \text{ N}$, $a = 3 \text{ m}$. Пресметнете работата на силата $\mathbf{F}$ при преместване на частицата от $x = 0$ до $x = 3 \text{ m}$.

7. Шайба с маса m , поставена върху хоризонтална равнина, получава начална скорост v_0 . Коефициентът на триене между шайбата и равнината зависи от изминатия от шайбата път s по закона $k = cs$, където $c > 0$ е константа. Определете максималната (по модул) моментна мощност на силата на триене.

8. Пръстен с маса m се движи по гладък проводник, извит в дъга от окръжност с радиус r , която лежи в хоризонтална равнина. Пръстенът преминава през точка A със скорост v_0 и в този момент започва да му действа постоянна хоризонтална сила с големина F (фиг. 8-7). Определете скоростта на пръстена в точка B .



9. Потенциална енергия

Работа на силата на тежестта

Да разгледаме материална точка с маса m , която се движи близо до земната повърхност (фиг. 9-1). Ще пресметнем работата, която извършва силата на тежестта $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ при преместване на материалната точка от началното положение 1 с координати (x_1, y_1) в положение 2 с координати (x_2, y_2) . За да изразим елементарната работа dA , ще представим вектора на силата на тежестта и вектора на елементарното преместване $d\mathbf{r}$ чрез техните компоненти спрямо координатната система xOy : $\mathbf{G} = -mg\mathbf{j}$ и $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$.

Забележка. Ще обърнем внимание, че $mg > 0$ е модулът на силата на тежестта, а знакът минус показва, че векторите $\mathbf{G}$ и $\mathbf{j}$ имат противоположни посоки. Стойностите на скаларните компоненти dx и dy на елементарното преместване $d\mathbf{r}$ обаче може да са както положителни, така и отрицателни.

Елементарната работа е

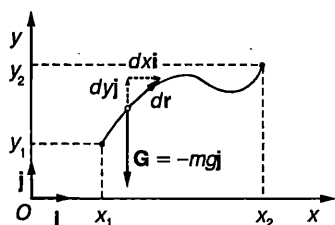
$$dA = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -mg\mathbf{j} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = -mgdy,$$

където сме отчели, че $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ и $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$. Интегрираме в граници от $y = y_1$ до $y = y_2$ и определяме работата на силата на тежестта

$$(9.1) \quad A = - \int_{y_1}^{y_2} mgdy = -mg(y_2 - y_1) = -mgh,$$

където $h = y_2 - y_1$ е изменението на височината на материалната точка над земната повърхност. Тъй като траекторията беше избрана произволно, от получения резултат следва изводът, че *работата на*

Фиг.9-1.



силата на тежестта не зависи от траекторията, по която се извършва преместването, а се определя единствено от разликата във височините на началното и крайното положение. Силата на тежестта върши отрицателна работа при издигане на материалната точка (при $h > 0$) и положителна работа при спускане (при $h < 0$).

Консервативни сили

Сили, чиято работа не зависи от траекторията, по която се движи материалната точка, а само от началното и крайното положение, се наричат *консервативни сили*. На фиг.9-2 са показани три произволно избрани траектории, по които материална точка, на която действа сила $\mathbf{F}$, се премества от положение 1 в положение 2. Да означим с A_a , A_b и A_c работата на силата $\mathbf{F}$ в трите случая. Силата $\mathbf{F}$ е консервативна, ако $A_a = A_b = A_c = A_{12} = \text{const}$.

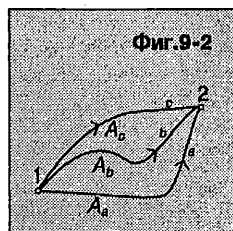
От определението за консервативна сила следва, че нейната работа по затворен контур е равна на нула. Действително, ако например материалната точка от фиг.9-2 отначало премине от положение 1 в положение 2 по траекторията a , консервативната сила $\mathbf{F}$ извършва работа $A_a = A_{12}$. След това материалната точка се връща обратно в началното положение 1, например по траекторията c , при което силата $\mathbf{F}$ извършва работа A_c' . От третия принцип на механиката следва, че $A_c' = -A_c$. От друга страна, тъй като силата е консервативна: $A_c = A_{12}$. Следователно $A_c' = -A_{12}$. Общата работа по затворената траектория ac е

$$A = A_a + A_c' = A_{12} - A_{12} = 0.$$

Понеже точките 1 и 2 и траекториите a и c са избрани произволно, полученият резултат е в сила за работата на консервативна сила по произволен затворен контур L . Математически той се изразява с уравнението

$$(9.2) \quad \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Кръгчето върху знака на интеграла показва, че интегрирането (пресмятане на работата на силата $\mathbf{F}$) се



Фиг.9-2

извършва по затворения контур L .

Както видяхме в началото на този параграф, работата на силата на тежестта зависи само от началното и от крайното положение на материалната точка, т.е. тя е консервативна сила. Консервативни са също така всички гравитационни сили, силите на еластичност, електростатичните сили и др.

Не всички сили обаче са консервативни. Например работата на силите на триене и съпротивление $\mathbf{f}_k$ по затворен контур винаги е отрицателна: $\oint_L \mathbf{f}_k \cdot d\mathbf{r} < 0$. Та-

кива сили се наричат *дисипативни сили*. В резултат на тяхната работа механичната енергия се превръща във вътрешна енергия (отделя се количество топлина). Сили, които винаги са насочени перпендикулярно на скоростта на материалната точка, се наричат *жироскопични сили*. Примери за жироскопични сили са кориолисовата сила и магнитната сила, която действа на заредена частица, движеща се в магнитно поле. Тъй като са перпендикулярни на преместването (скоростта), работата на жироскопичните сили винаги е нула – както по затворен контур, така и при произволно преместване. За разлика от консервативните сили, чиято големина и посока зависи единствено от положението на материалната точка, жироскопичните сили зависят и от нейната скорост.

Потенциална енергия

Материална точка, на която действа консервативна сила $\mathbf{F}$, се премества от положение 1 с радиус-вектор $\mathbf{r}_1$ в положение 2 с радиус-вектор $\mathbf{r}_2$. Тъй като работата A_{12} на консервативната сила зависи единствено от началното и от крайното положение, тя може да се представи като изменение на една функция на положението на материалната точка $W(\mathbf{r})$

$$(9.3) \quad A_{12} = W(\mathbf{r}_1) - W(\mathbf{r}_2) = -\Delta W$$

или

$$(9.4) \quad \Delta W = -A_{12}.$$

Величината W , която е функция единствено на координатите на материалната точка и не зависи от нейната скорост,

се нарича *потенциална енергия* на материалната точка в полето на консервативната сила $\mathbf{F}$. По определение (вж. уравнение (9.4)) изменението на потенциалната енергия ΔW е равно на взетата с обратен знак работа на консервативната сила. Когато точките 1 и 2 са безкрайно близо една до друга, уравнение (9.4) приема вида

$$(9.5) \quad dW = -dA = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

където dA е елементарната работа на консервативната сила $\mathbf{F}$ при преместване $d\mathbf{r}$.

От уравнение (9.4) или (9.5) потенциалната енергия може да се определи с точност до константа. За еднозначното ѝ определяне трябва да се приеме, че в дадено положение на материалната точка потенциалната ѝ енергия е равна на нула. Изборът на точката (или точките), в която потенциалната енергия е нула, може да стане по различен начин. Например от уравнения (9.1) и (9.4) за потенциалната енергия на материална точка в полето на силата на тежестта получаваме

$$A_{12} = -mg(y_2 - y_1) = W(y_1) - W(y_2).$$

Ако приемем, че потенциалната енергия е нула, когато материалната точка се намира на земната повърхност, т.е. при $y_1 = 0$, тогава потенциалната енергия на височина $h = y_2 - 0 = y_2$ е

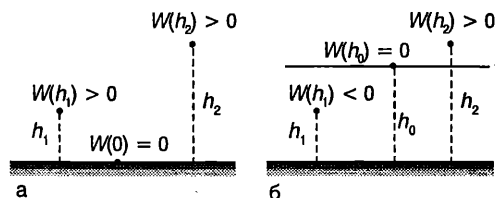
$$(9.6) \quad W(y_2) = mgy_2$$

или

$$(9.7) \quad W = mgh.$$

При такъв избор на нулевото равнище всички тела, които са издигнати над земната повърхност, имат положителна по-

Фиг. 9-3. Нулевото равнище на потенциалната енергия може да се избира по различен начин. Телата, които са разположени над нулевото равнище, имат положителна потенциална енергия, а телата, разположени под нулевото равнище, имат отрицателна потенциална енергия.



тенциална енергия (фиг.9-3а). Нулевото равнище можем да изберем и по друг начин. Например да приемем, че потенциалната енергия е нула на някаква височина h_0 над земната повърхност. Тогава телата, които се намират на по-голяма височина от h_0 имат положителна потенциална енергия, а тези, за които $h < h_0$, потенциалната енергия е отрицателна (фиг.9-3б).

Ако разглеждаме Земята като инерциална отправна система, силата на тежестта съвпада с гравитационната сила, с която Земята привлича телата (вж. §7). Когато телата са далеч от земната повърхност, гравитационната сила вече не може да се смята за постоянна. Например големината на силата, с която Земята привлича спътник, е обратнопропорционална на квадрата на разстоянието от спътника до центъра на Земята и се определя от закона на Нютон за гравитацията. Доказва се (вж. Пример 9.1), че гравитационната потенциална енергия W на спътник (материална точка) с маса m , който се намира на разстояние r от центъра на Земята, е

$$(9.8) \quad W(r) = -\frac{\gamma M_3 m}{r}.$$

В общия случай уравнение (9.8) изразява потенциалната енергия на система от две материални точки, които си взаимодействат с гравитационни сили (можем също така да смятаме, че W е потенциалната енергия на едната материална точка в гравитационното поле на другата, т.е. в полето на гравитационната сила, с която ѝ действа втората точка). Потенциалната енергия е приета за равна на нула, когато материалните точки са безкрайно отдалечени една от друга. При такъв избор на нулевото равнище гравитационната потенциална енергия винаги е отрицателна. Действително, съгласно с определението за потенциална енергия (9.4) в случая тя е равна на работата, която извършват гравитационните сили при отдалечаване на материалните точки на безкрайно разстояние една от друга. Тъй като гравитационните сили са сили на привличане, те се противопоставят на раздалечаването и извършват отрицателна работа.

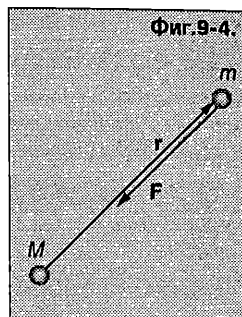
Пример 9.1. а) Докажете, че гравитационната сила на взаимодействие между две материални точки е консервативна.

б) Определете гравитационната потенциална енергия на спътник с маса m , който се намира на разстояние r от центъра на Земята. Масата на Земята е M_3 .

Решение. а) Гравитационната сила F , с която материална точка с маса M действа на материална точка с маса m , се определя от закона на Нютон за всеобщото привличане, който може да се запише във векторен вид (фиг.9-4):

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma M m}{r^3} \mathbf{r}.$$

Работата на силата F при произволно преместване $d\mathbf{r}$ е:



$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\gamma M m}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

Като използваме правилото за диференциране на произведение, представяме скаларното произведение $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ във вида

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})/2 = d(r^2)/2 = r dr,$$

където r е модулът на радиус-вектора, а dr е неговото изменение ($dr > 0$, когато r нараства и $dr < 0$, когато r намалява). Следователно

$$dA = -\frac{\gamma M m}{r^3} r dr = -\frac{\gamma M m}{r^2} dr.$$

Работата на гравитационната сила при преместване на материалната точка с маса m между две произволни точки с радиус-вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ е

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \frac{\gamma M m}{r_2} - \frac{\gamma M m}{r_1}.$$

Виждаме, че работата на гравитационната сила зависи единствено от началното и крайното положение (от разстоянието r до силовия център). Следователно гравитационните сили са консервативни.

б) Ще разглеждаме Земята и спътника като материални точки с маси M_3 и m . За да определим потенциалната енергия на спътника в полето на гравитационната сила, с която му действа Земята (потенциалната енергия на системата спътник – Земя), ще използваме определението за потенциална енергия (уравнение (9.4)) и получения в точка а) резултат за работата на гравитационната сила

$$W(r) - W(r_2) = A = \frac{\gamma M_3 m}{r_2} - \frac{\gamma M_3 m}{r}.$$

Нека спътникът се отдалечава безкрайно много от Земята ($r_2 \rightarrow \infty$). Тогава

$$W(r) - W(\infty) = -\frac{\gamma M_3 m}{r}.$$

Тъй като модулът на члена в дясната страна на полученото уравнение намалява при увеличаване на разстоянието r между спътника и Земята, най-удобно е да приемем, че потенциалната енергия на спътника е равна на нула, когато той е безкрайно отдалечен, т.е. $W(\infty) = 0$. Тогава

$$W(r) = -\frac{\gamma M_3 m}{r}.$$

Механична енергия

Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на едно тяло (материална точка) се нарича *механична енергия* E на тялото

$$(9.9) \quad E = E_k + W.$$

Нека на материална точка действат както консервативни, така и неконсервативни сили. Тогава съгласно със закона за изменение на кинетичната енергия $A_{\text{конс.}} + A_{\text{неконс.}} = \Delta E_k$, където $A_{\text{конс.}}$ е работата на консервативните сили, а $A_{\text{неконс.}}$ – на неконсервативните сили. Тъй като по определение $A_{\text{конс.}} = -\Delta W$, горното уравнение може да се запише във вида

$$(9.10) \quad A_{\text{неконс.}} = \Delta E_k + \Delta W = \Delta E.$$

Уравнение (9.10) изразява закона за изменение на механична енергия на едно тяло (материална точка): *изменението на механична енергия ΔE е равно на работата на неконсервативните сили, които действат на тялото.*

С въвеждането на потенциалната енергия отпада необходимостта да се пресмята непосредствено работата на консервативните сили – това става чрез отчитане изменението на потенциалната енергия.

Пример 9.2. Скиор с маса $m = 100 \text{ kg}$ се спуска по склон от височина $h = 100 \text{ m}$. Определете работата на силите на триене и съпротивление, ако скоростта на скиора в подножието на склона е $v = 15 \text{ m/s}$.

Решение. На скиора действа силата на тежестта, която е консервативна, и резултантната на всички сили на триене и съпротивление (триене между ските и снега, съпротивление на въздуха), която не е консервативна. Работата на силата на тежестта ще отчитаме чрез изменението на потенциалната енергия на скиора. Отначало скиорът има само потенциална енергия mgh , а в подножието на склона, което избираме за нулево равнище на потенциалната енергия, енергията е само кинетична. Съгласно със закона за изменение на механичната енергия, работата на силите на триене и съпротивление е:

$$A_{\text{неконс.}} = \Delta E_k + \Delta W = \left(\frac{mv^2}{2} - 0\right) + (0 - mgh) =$$

$$-\left(mgh - \frac{mv^2}{2}\right) = -89 \text{ kJ}.$$

Задачи

1. Топка с маса $m = 60 \text{ g}$, която е хвърлена вертикално нагоре с начална скорост $v_0 = 20 \text{ m/s}$, достига максимална височина $h = 15 \text{ m}$. Определете работата на силата на съпротивление на въздуха при издигането на топката. Приемете земното ускорение $g = 10 \text{ m/s}^2$.

2. От вертолет, който лети хоризонтално на височина $h = 20 \text{ m}$ със скорост $v_0 = 10 \text{ m/s}$, е пуснат контейнер с маса $m = 50 \text{ kg}$. Определете работата на силата на съпротивление на въздуха, ако контейнерът достига земната повърхност със скорост $v = 20 \text{ m/s}$.

3. На частица с маса $m = 1 \text{ g}$, която може да се движи само по оста x , действа консервативна сила $F = -c_1 x - c_2 x^2$, където $c_1 = 0,02 \text{ N/m}$ и $c_2 = 0,01 \text{ N/m}^2$ са положителни константи.

а) Изразете потенциалната енергия на частицата като функция на координатата x .

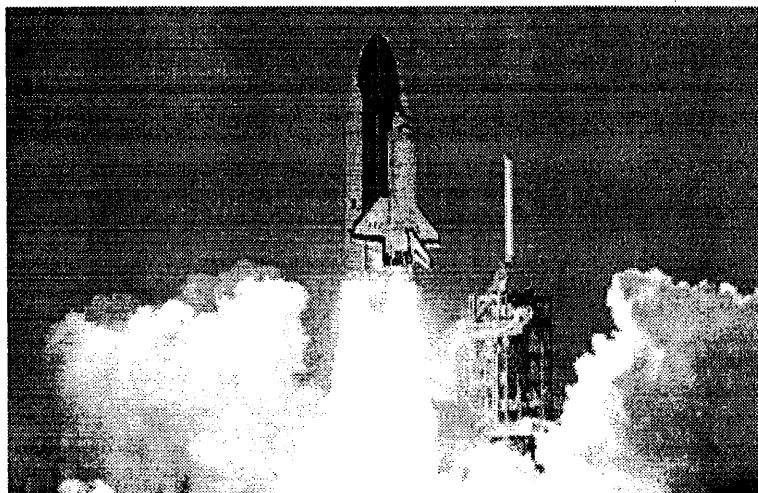
б) Частицата преминава през началото O на оста x ($x = 0$) със скорост $v = 50 \text{ m/s}$, насочена в положителната посока на оста x . На какво максимално разстояние от точка O ще се отдалечи частицата?

4. Частица с маса m се движи в равнината xy под действие на сила $\mathbf{F} = c_1 x \mathbf{i} + c_2 y \mathbf{j}$, където c_1 и c_2 са положителни константи.

а) Докажете, че силата $\mathbf{F}$ е консервативна.

б) Определете потенциалната енергия W на частицата в точка с координати (x, y) . Приемете, че в началото O на координатната система ($x = 0$; $y = 0$) потенциалната енергия е $W = 0$.

Закони за запазване в механиката



Досега разглеждахме движението на отделна материална точка. В тази глава ще преминем към задачата да изследваме поведението на механична система, съставена от две или повече (N на брой) материални точки, които взаимодействат помежду си и едновременно с това са подложени на действието на външни сили. Независимо от сложния характер на движението на отделните частици, всяка механична система като цяло се характеризира с физичните величини импулс, момент на импулса и механична енергия на системата. Изменението на тези величини с течение на времето се описва от закони, които са аналогични на разгледаните в Глава 2 закони на динамиката на отделна материална точка. Особено внимание ще отделим на условията, при които енергията, импулсът и моментът на импулса на механична система не се изменят с течение на времето. Законите за запазване на енергията, импулса и момента на импулса са фундаментални физични закони. Независимо, че в рамките на класическата механика те се получават като следствия от принципите на Нютон, тяхната област на приложимост е много по-голяма. Законите за запазване са в сила във всички области на физиката, включително в атомната и ядрената физика, във физиката на елементарните частици и др., където нютоновата механика е неприложима.

10. Закон за запазване на импулса

Затворена система

Да разгледаме произволна система от тела (материални точки). Всички останали тела във Вселената, които не влизат в тази система, са външни тела (по отношение на разглежданата система). Силите на взаимодействие между телата от системата се наричат *вътрешни сили*, а силите, с които външните тела действат на телата от системата – *външни сили*.

Механична система, на която не действат външни сили, се нарича затворена система.

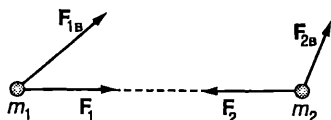
Строго погледнато нито една реална механична система не е напълно затворена, защото околните тела винаги ѝ действат с гравитационни сили. Когато вътрешните сили са много по-големи от външните сили, в редица случаи действието на последните може да се пренебрегне и системата да се смята за затворена. Например при изучаване свободното падане на телата пренебрегваме външните гравитационни сили, с които действат Луната, Слънцето и другите небесни тела и разглеждаме системата тяло – Земя като затворена система.

Закон за изменение на импулса

Ще разгледаме най-проста механична система, съставена от две материални точки, които взаимодействат със сили F_1 и F_2 . На материалните точки действат външни сили $F_{1в}$ и $F_{2в}$ (фиг.10-1). Записваме уравнението на втория принцип на механиката за всяка от материалните точки

$$\frac{dp_1}{dt} = F_1 + F_{1в}; \quad \frac{dp_2}{dt} = F_2 + F_{2в}$$

Фиг.10-1.



и събираме двете уравнения

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = (F_1 + F_2) + (F_{1в} + F_{2в}).$$

Съгласно с третия принцип на механиката силите на взаимодействие на двете материални точки са равни по големина и противоположни по посока, т.е. $F_1 + F_2 = 0$. Следователно

$$(10.1) \quad \frac{dp}{dt} = F_{в},$$

където $p = p_1 + p_2$ е векторната сума от импулсите на двете материални точки, а $F_{в} = F_{1в} + F_{2в}$ е векторната сума от външните сили. Доказва се, че полученият резултат остава в сила за механична система, съставена от произволен брой N материални точки. Векторната физична величина

$$(10.2) \quad p = \sum_{i=1}^N p_i,$$

която е равна на сумата от импулсите на всички материални точки от системата, се нарича *импулс на механичната система*.

Уравнение (10.1) изразява закона за изменение на импулса на система от материални точки, който гласи: *скоростта на изменение на импулса p на система от материални точки (производната на p по времето t) е равна на векторната сума от*

всички външни сили $F_{в} = \sum_{i=1}^N F_{вi}$, действащи на системата. По аналогия със случая на отделна материална точка ще наричаме силата $F_{в}$ резултантна на всички външни сили.

Закон за запазване на импулса

За затворена система $F_{в} = 0$ и уравнение (10.1) приема вида: $dp/dt = 0$, откъдето следва, че

$$(10.3) \quad p = \text{const.}$$

Уравнение (10.3) изразява закона за запазване на импулса, който гласи:

Импулсът на затворена механична система не се изменя с течение на времето.

Вътрешните сили могат по сложен начин да променят импулсите на отделните материални точки – в общия случай всяка от тях се движи по криволинейна траектория като непрекъснато променя посоката и големината на импулса си. Вътрешните сили обаче не променят импулса на системата – той може да бъде изменен само под действие на външни сили.

Ако посоката на резултантната външна сила $\mathbf{F}_в$ не се изменя, можем да представим импулса на системата като сума от две компоненти: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{||} + \mathbf{p}_{\perp}$, където компонентата $\mathbf{p}_{||}$ е успоредна на вектора $\mathbf{F}_в$, а компонентата $\mathbf{p}_{\perp}$ е перпендикулярна на $\mathbf{F}_в$. Уравнение (10.1) се записва отделно за двете компоненти на импулса

$$(10.4) \quad \frac{dp_{||}}{dt} = F_в; \quad \frac{dp_{\perp}}{dt} = 0,$$

откъдето следва, че само успоредната на външната сила компонента $\mathbf{p}_{||}$ на импулса на системата се изменя с течение на времето, докато перпендикулярната компонента $\mathbf{p}_{\perp}$ остава постоянна ($\mathbf{p}_{\perp} = const$).

Пример 10.1. По хоризонтална равнина се хлъзга без триене със скорост v трупче с маса M . Върху него от височина h пада топче пластилин с маса m и залепва. Колко е скоростта u на трупчето след залепването на пластилина?

Решение. На системата от две тела трупче – топче действат външни сили – силата на тежестта и силата на реакция на хоризонталната опора. Те са насочени във вертикално направление и тяхната резултантна преди и по време на удара е различна от нула. Затова вертикалната компонента на импулса на системата се изменя. В хоризонтално направление на системата не действат външни сили, тъй като трупчето се хлъзга без триене. Следователно хоризонталната компонента на импулса на системата се запазва

$$Mv = (M + m)u,$$

където сме отчели, че след удара двете тела се движат с еднаква скорост u . От полученото уравнение определяме скоростта u

$$u = \frac{M}{M + m} v.$$

Полученият резултат показва, че в случая, когато може да се пренебрегне триенето, скоростта u не зависи от височината h .

Център на масите

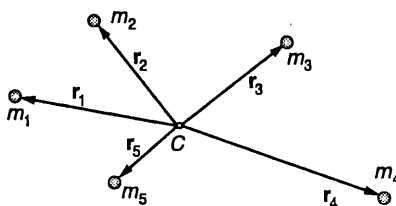
Център на масите на система от N материални точки се нарича геометрична точка C , чийто радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ се задава с уравнението

$$(10.5) \quad M\mathbf{r}_c = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_N\mathbf{r}_N = \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{r}_i,$$

където $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ е сумата от масите на всички материални точки (маса на системата), а $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и т.н са техните радиус-вектори спрямо дадена координатна система. Ако изберем началото на координатната система да съвпада с центъра на масите, тогава $\mathbf{r}_c = 0$ и уравнение (10.5) добива вида

$$(10.6) \quad \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{r}_i = 0,$$

т.е. центърът на масите е такава геометрична точка C , за която сумата от произведения на масите на материалните точки и техните радиус-вектори, прекарани от точка C (фиг.10-2), е равна на нула.



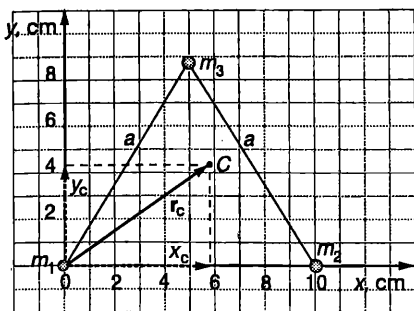
Фиг.10-2. Център на масите.

Ще обърнем внимание, че положението на центъра на масите на система от материални точки може да не съвпада с нито една от материалните точки.

Пример 10.2. Три топчета с маси $m_1 = 1$ g; $m_2 = 2$ g и $m_3 = 3$ g са разположени във върховете на равностранен триъгълник със страна $a = 10$ cm. Определете положението на центъра на масите на системата от три тела.

Решение. Избираме правоъгълна координатна система така, че първото топче да е разположено в нейното начало (фиг.10-3), а второто топче да лежи върху оста x . Координатите на трите топчета са: $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = a, y_2 = 0$; $x_3 = a/2$;

$y_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. За да определим координатите на



Фиг. 10-3.

центъра на масите на системата, записваме векторното уравнение (10.5) по компоненти

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1 \text{ g})(0) + (2 \text{ g})(10 \text{ cm}) + (3 \text{ g})(5 \text{ cm})}{1 \text{ g} + 2 \text{ g} + 3 \text{ g}} = 5,8 \text{ cm};$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1 \text{ g})(0) + (2 \text{ g})(0) + (3 \text{ g})(8,66 \text{ cm})}{1 \text{ g} + 2 \text{ g} + 3 \text{ g}} = 4,3 \text{ cm}.$$

Радиус-векторът r_c на центъра на масите с компоненти $x_c = 5,8 \text{ cm}$ и $y_c = 4,3 \text{ cm}$ е показан на фиг. 10-3. Ще обърнем внимание, че подходящият избор на координатната система значително опрости пресмятанията на компонентите на радиус-вектора.

Движение на центъра на масите

Диференцираме двете страни на уравнение (10.5) по времето

$$(10.7) \quad M \frac{dr_c}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{dr_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i v_i = \sum_{i=1}^N p_i = p.$$

Следователно импулсът p на системата от материални точки е равен на производението от масата M на системата и скоростта $v_c = dr_c/dt$ на центъра на масите

$$(10.8) \quad M v_c = p.$$

Диференцираме уравнение (10.8) по времето: $M \frac{dv_c}{dt} = \frac{dp}{dt}$, след което заместваме

$$\frac{dp}{dt} = F_b \text{ (вж. уравнение (10.1)) и получаваме}$$

$$(10.9)$$

$$M \frac{dv_c}{dt} = F_b.$$

Уравнение (10.9) има същия вид, както уравнението на движение на отделна материална точка с маса M (вж. уравнение (4.3) на стр. 31). Следователно центърът на масите на системата от материални точки се движи така, както би се движела една отделна материална точка с маса M , равна на масата на системата, ако тази материална точка се постави в центъра на масите на системата и към нея се приложи резултантната на всички външни сили F_b .

И така, ако се интересуваме от постъпателното движение на една механична система като цяло, можем да се ограничим с разглеждането само на една (фиктивна) материална точка, поставена в центъра на масите на системата, и да изследваме нейното движение под действието на резултантната на външните сили.

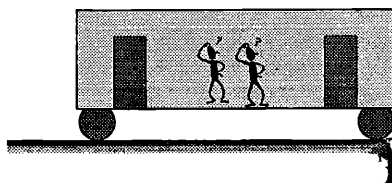
Ако системата е затворена ($F_b = 0$), от уравнение (10.9) следва, че скоростта на центъра на масите не се изменя: $v_c = \text{const.}$

Центърът на масите на затворена механична система се движи праволинейно и равномерно или се намира в покой.

Това твърдение е друга (еквивалентна) формулировка на закона за запазване на импулса.

Пример 10.3. Двама студенти се намират по средата на неподвижен вагон, който е на ръба на пропаст (фиг. 10-4). Вагонът може свободно да се движи по хоризонтални релси както към пропастта, така и в обратна посока. В двата му края има врати. От коя врата трябва да излязат студентите?

Фиг. 10-4.



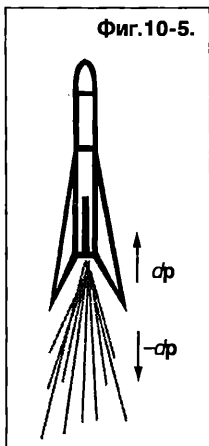
Решение. В хоризонтално направление на системата вагон-студенти не действа външна сила. В началния момент центърът на масите на системата е неподвижен. Съгласно със закона за запазване на импулса той ще остане неподвижен независимо как се движат студентите вътре във вагона. За да се изпълни това условие, ако студентите тръгнат в обратна на пропастта посока, вагонът ще се премести към пропастта и ще падне в нея. Те ще се спасят, ако тръгнат към пропастта – тогава вагонът ще се отдалечи от нея и студентите могат да излязат през предната врата.

Реактивно движение

Реактивното движение на ракети и самолети се основава на закона за запазване на импулса. Да разгледаме ракета, която в началния момент е в покой. Включва се реактивният двигател и изгорелите газове се изхвърлят с голяма скорост през соплото му. Газовете и ракетата образуват затворена механична система, чийто импулс не се изменя с времето. Ако импулсът на изхвърлените за малък интервал от време dt газове е $-dp$ (фиг.10-5), от закона за запазване на импулса следва, че за същото време ракетата ще получи импулс dp и ще започне да се движи в противоположна на газовете посока. С течение на времето скоростта на ракетата нараства, защото тя непрекъснато получава допълнителен импулс при изхвърлянето на газове.

Реактивно движение извършват и някои живи организми. Например медузата се свива и изтласква назад водата изпод камбановидното си тяло, а самата тя получава импулс и се придвижва в обратната посока (напред).

Сега ще анализираме количествено движението на ракета, на която действа външна сила F_B . Съгласно с втория принцип на механиката изменението на импулса на ракетата за време dt е равно на им-



пулса на външната сила

(10.10) $(m + dm)(v + dv) + dm_r v_r - mv = F_B dt$,
където $dm < 0$ е изменението на масата на ракетата за време dt , $dm_r = -dm > 0$ е масата за изхвърлените за същото време от ракетата газове, а v и v_r са абсолютните скорости на ракетата и на газовете (спрямо инерциалната отправна система, в която е записано уравнението за движение на ракетата (10.10)). Разкриваме скобите в уравнение (10.10), пренебрегваме едночлена $dmdv$, който е безкрайно малка величина от втори порядък (произведение от две безкрайно малки величини). Получаваме

$$(10.11) \quad m dv = (v_r - v) dm + F_B dt,$$

където $v_r - v = u$ е относителната скорост на газовете спрямо ракетата. Делим двете страни на уравнение (10.11) на dt и получаваме

$$(10.12) \quad m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} + F_B.$$

Уравнение (10.12) описва реактивно-то движение на ракета, или по-общо казано – движението на тяло с променлива маса.

Пример 10.4. Ракета с маса m_0 , която лети в космическото пространство със скорост v_0 , включва двигателя си. Определете скоростта на ракетата, след като се изразходва гориво с маса m_r . Приемете, че изгорелите газове се изхвърлят в обратна на движението на ракетата посока с постоянна относителна скорост u спрямо ракетата.

Решение. На ракетата не действат външни сили и уравнението на движението (10.12) добива вида

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}.$$

Избираме координатна ос x , насочена по посока на движението на ракетата, и записваме горното векторно уравнение по компоненти (по оста x)

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt},$$

където сме отчели, че векторът u е насочен в отрицателната посока на оста x . Разделяме променливите

$$dv = -u \frac{dm}{m}$$

и интегрираме

$$\int_{v_0}^v dv = -u \int_{m_0}^{m_0 - m_r} \frac{dm}{m},$$

където $m_0 - m_r$ е крайната маса на ракетата. След като решим интеграла получаваме

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_r}.$$

Тъй като логаритъмът е растяща функция, от получения резултат може да се направи изводът, че за да достигне ракетата голяма крайна скорост v , по време на ускоряването нейната маса трябва значително да се намали (отношението $m_0/(m_0 - m_r)$ трябва да има колкото е възможно по-голяма стойност). Затова се използват многостепенни ракети, при които всяка от степените, след като се изчерпи съдържащото се в нея гориво, се отделя от ракетата, което допълнително спомага за намаляване масата на ракетата.

Пример 10.5. Ракета с начална маса m_0 излита вертикално нагоре от земната повърхност. Относителната скорост u на газовата струя спрямо ракетата да се приеме за постоянна. Съпротивлението на въздуха не се отчита. Изразете големината на скоростта v на ракетата като функция на времето t и на масата m на ракетата в дадения момент. Земното ускорение е $g = \text{const}$.

Решение. На ракетата действа силата на тежестта, която в случая е външна сила. Уравнението на движението (10.12) приема вида

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} + mg.$$

Избираме координатна ос x , насочена вертикално нагоре, и записваме горното векторно уравнение по компоненти (по оста x)

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} - mg,$$

където сме отчели, че векторите u и g са насочени в отрицателната посока на оста x . Прехвърляме едночлена mg от дясната страна на уравнението и го вкарваме под знака на диференциала

$$m \frac{d}{dt}(v + gt) = -u \frac{dm}{dt}.$$

Полагаме $x = v + gt$, разделяме променливите, $dx = -u(dm/m)$, и интегрираме

$$x = \int -u \frac{dm}{m} + C; \quad x = -u \ln m + C.$$

Заместяваме $x = v + gt = -u \ln m + C$, и определяме константата C от началните условия: в началния момент $t = 0$ скоростта на ракетата е $v = 0$, а масата е $m = m_0$.

Тогава $0 = -u \ln m_0 + C$, откъдето изразяваме $C = u \ln m_0$. Заместяваме C в уравнението за скоростта и получаваме

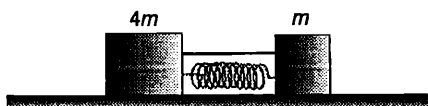
$$v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Ще отбележим, че бихме могли да решим задачата без да извършваме пресмятания, като използваме принципа за независимото действие на силите и резултата от Пример 10.4. Ракетата извършва едновременно две движения: реактивно движение (вертикално нагоре) и свободно падане под действие на силата на тежестта. Скоростта ѝ е векторна сума от скоростите на двете движения.

Задачи

1. От покрива на висока сграда е пуснат камък. При свободното падане импулсът на камъка нараства. Кое е другото тяло, което заедно с камъка образува затворена система, чийто импулс не се изменя?
2. Снаряд е изстрелян вертикално нагоре и когато достига най-високата си точка се взривява на три части. Едната част се движи вертикално нагоре, а втората – вертикално надолу. Възможно ли е третата част да се движи хоризонтално? Обяснете.
3. Снаряд, който се движи със скорост v , се взривява на две еднакви части. Непосредствено след взрива едната от тях се движи със скорост $3v$. Каква е скоростта на другата част?
4. Върху хоризонтална равнина са поставени две трупчета с маси m и $4m$, свързани с нишка, и между тях е поставена свита пружина (фиг.10-6). Като се пререже нишката, трупчето с маса $4m$ започва да се движи със скорост $0,5 \text{ m/s}$. Колко е скоростта на другото трупче? Триене-

Фиг.10-6.



то и масите на пружината и нишката се пренебрегват.

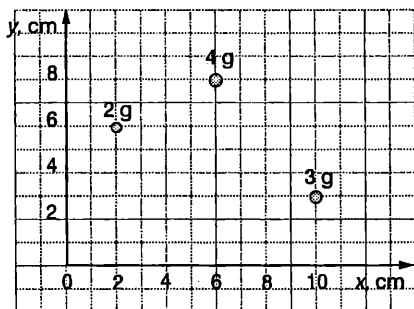
5. Човек с маса m стои в неподвижна лодка с маса M . Човекът скача във водата със скорост v_1 , която е насочена хоризонтално. Определете скоростта на лодката след скока. Съпротивлението на водата да не се отчита.

6. Оръдие, което е поставено върху гладка хоризонтална повърхност, изстрелва снаряд с маса m . Скоростта v_1 на снаряда сключва ъгъл α с хоризонта. Определете скоростта на оръдието след изстрела. Масата на оръдието заедно със снаряда е M .

Указание. В хоризонтално направление на системата оръдие-снаряд не действат външни сили и хоризонталната компонента на нейния импулс се запазва.

7. Разстоянието между центровете на атомите на въглерода (C) и кислорода (O) в молекулата на въглеродния оксид (CO) е $1,131 \cdot 10^{-10}$ m. На какво разстояние от атома на въглерода се намира центърът на масите на молекулата?

8. Определете координатите на центъра на масите на системата от три частици, показана на *фиг.10-7*.



Фиг.10-7.

9. Две частици A и B първоначално се намират в покой на разстояние 10 cm една от друга. Частицата A има маса 1 g, масата на частицата B е 4 g. Частиците взаимно се привличат, започват да се приближават една към друга и се удрят. На системата от две частици не действат външни сили.

а) Опишете движението на центъра на масите на системата.

б) Колко сантиметра ще измине всяка от частиците до удара?

10. Вагонетка с дължина $L = 4$ m и маса $M = 240$ kg е в покой върху гладка хоризонтална равнина, ориентирана в посока север-юг. На се-

верния край на вагонетката стои човек с маса $m = 80$ kg. На какво разстояние и в каква посока ще се премести вагонетката, ако човекът премине на южния ѝ край? Центърът масите на вагонетката се намира по средата ѝ.

11. Автомобил с маса $m_1 = 1500$ kg се движи със скорост $v_1 = 72$ km/h по праволинеен участък от магистрала, следван от камион с маса $m_2 = 8000$ kg, чиято скорост е $v_2 = 54$ km/h. Определете скоростта на центъра на масите на системата от две тела (автомобил + камион).

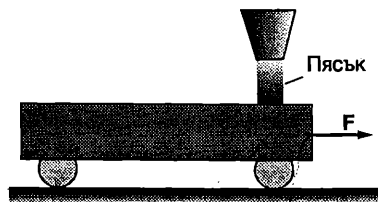
12. Върху гладка хоризонтална опора е поставена лека пластинка с маса M , върху която се намира охлюв с маса m . В началния момент охлювът и пластинката са в покой. С каква скорост u спрямо опората ще се движи пластинката, ако охлювът започне да пълзи по нея със скорост v (спрямо пластинката)?

13. Космически апарат се намира в покой (спрямо Слънцето) в междупланетното пространство. При включване на реактивния двигател изгорелите газове излитат с постоянна относителна скорост u (спрямо космическия апарат). Колко трябва да е отношението на началната маса към крайната маса на апарата, за да достигне той скорост: а) $v = u$; б) $v = 2u$.

14. Платформа, която се движи с постоянна скорост $v = 0,3$ m/s, навлиза под неподвижен бункер (*фиг.10-8*), от който върху платформата се изсипва пясък със скорост $\mu = 300$ kg/s. Каква хоризонтална сила F трябва да се приложи към платформата, за да продължи тя да се движи със същата постоянна скорост? Триенето не се отчита.

15. Кофа с пясък започва да се издига вертикално нагоре под действие на постоянна сила с големина F . На дъното на кофата има дупка, през която пясъкът се изсипва с постоянна скорост μ kg/s. Изразете ускорението и скоростта на кофата като функция на времето. Началната маса на кофата заедно с пясъка е m_0 . Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

Фиг.10-8.



11. Закон за запазване на енергията

Енергия на механична система

Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на всички материални точки от една механична система се нарича механична енергия на системата

$$(11.1) \quad E = E_k + W,$$

където $E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki}$ е кинетичната енергия,

а $W = \sum_{i=1}^N W_i$ – потенциалната енергия на

системата (E_{ki} е кинетичната енергия на i -тата частица, а W_i е потенциалната ѝ енергия на взаимодействие с всички останали ($N - 1$ частици от системата). Законът за изменение на механичната енергия на една материална точка (уравнение (9.10) на стр. 62) се обобщава за механична система:

Изменението на механичната енергия ΔE на система от материални точки е равно на работата $A_{\text{неконс.}}$ на неконсервативните сили, действащи на системата.

$$(11.2) \quad A_{\text{неконс.}} = \Delta E.$$

Закон за запазване на механичната енергия

Да разгледаме затворена механична система, в която частиците си взаимодействат само с консервативни сили. Тогава $A_{\text{неконс.}} = 0$ и от уравнение (11.2) следва, че $\Delta E = 0$ или

$$(11.3) \quad E = E_k + W = \text{const.}$$

Уравнение (11.3) изразява закона за запазване на механичната енергия, който гласи:

Механичната енергия на затворена система, в която действат само консервативни вътрешни сили, не се изменя с течение на времето.

В резултат на работата на вътрешните консервативни сили става само непрекъснато превръщане на кинетична енергия в потенциална и обратно, докато пълната енергия се запазва.

Превръщане на енергията

Във всички реални макроскопични механични системи освен консервативни сили действат и неконсервативни сили – например дисипативни сили на триене и съпротивление. Дисипативните сили извършват отрицателна работа ($A_{\text{неконс.}} < 0$) и съгласно с уравнение (11.2) механичната енергия на системата намалява ($\Delta E < 0$). В резултат на работата на силите на триене става превръщане на механичната енергия в топлинна енергия – триещите се тела се загряват.

Ще напомним, че класическата механика изучава движението на макроскопичните тела, т.е. на телата, които са изградени от огромен брой микрочастици (молекули и атоми). Атомите и молекулите са в състояние на непрекъснато вътрешно движение и взаимодействие, което обаче не се отчита от класическата механика. Затова енергията на една система от макроскопични тела може условно да се раздели на механична и немеханична енергия. Последната не зависи от скоростите и взаимното положение на телата от системата, а се определя от вътрешното движение и взаимодействие между гравитните им частици. Съществуват различни видове немеханична енергия – топлинна енергия, химична енергия, ядрена енергия, енергия на топлинното излъчване и др. От гледна точка на съвременната наука всички форми на немеханична енергия се свеждат до кинетична и потенциална енергия на микрочастици от различните структурни равнища на материята. Например топлинната енергия на идеален газ е сума от кинетичната енергия на хаотичното топлинно движение на молекулите на газа. Химичната енергия се определя от кинетичната енергия на гравитните частици на атомите и молекулите (ядра и електронни обвивки) и потенциалната енергия на тяхното електрично взаимодействие. Ядрената енергия е сума от кине-

тичната и потенциалната енергия на гравитационните частици на атомните ядра (протони и неутрони), които взаимодействат с ядрени и електрични сили. Енергията на електромагнитното излъчване е сума от кинетичната енергия на светлинните кванти (фотоните), които могат да се разглеждат като микрочастици, движещи се със скоростта на светлината.

Процесите в неживата и в живата природа са свързани с непрекъснато преобразуване на енергията от един вид в друг. Преобразуване на енергията става както в космически мащаби, така и в отделните клетки на живите организми. В таблица 11.1 са дадени енергиите, свързани с някои процеси и явления.

Таблица 11.1. Приблизителни стойности на енергията (в джаули), свързана с някои явления и процеси в макро- и микросвета.

Явление или процес	Енергия, J
Големият взрив (раждане на Вселената).....	10^{68}
Енергия, която се отделя при избухване на свръхнова звезда.....	10^{44}
Слънчева енергия, попадаща върху	
Земята за една година.....	$5 \cdot 10^{24}$
Механична енергия на въртене на Земята, която се превръща в топлина за една година поради приливното триене.....	10^{20}
Ураган.....	10^{15}
Кинетична енергия на голям самолет.....	10^9
Дневна дажба храна за възрастен човек	10^7
Работа на човешко сърце за един тласък...	0,5
Електричен разряд на отделен неврон.....	10^{-10}
Енергия на една от връзките в молекула ДНК	10^{-20}

Запазване на енергията

Всички експериментални изследвания в различни области на физиката, химията и биологията показват, че енергия не се създава и не изчезва, а в резултат на различни взаимодействия тя само се преобразува от един вид в друг вид. В сила е общ закон за запазване на енергията:

Пълната енергия (сумата от всички видове енергия) на една изолирана система не се изменя.

Под изолирана система се разбира всяка съвкупност от макротела или микрочастици, която, подобно на затворена механична система, не е подложена на външни силови въздействия. Освен това изолираната система не обменя топлинна енергия или излъчване с околните тела. Вътре в системата могат да протичат различни процеси – механични, химични, биологични и др., при които се извършват сложни превръщания на енергията от един вид в друг вид, но пълната енергия на системата не се променя. Този факт е надеждно проверен експериментално. Винаги, когато е било констатирано „изчезване“ или „раждане“ на енергия, впоследствие се е установявало, че експериментът не е проведен достатъчно прецизно или не е отчетена някаква неизвестна за онова време форма на енергията.

И така, законът за запазване на енергията е фундаментален закон, който е в сила не само в механиката, но и при всички други процеси в природата.

Пример 11.1. Втора космическа скорост.

Определете минималната начална скорост v_2 , наречена втора космическа скорост, с която ракетата трябва да се изстреля от земната повърхност, за да преодолее гравитационното привличане на Земята и да се отдалечи в космическото пространство. Съпротивлението на въздуха не се отчита. Радиусът на Земята е $R_3 = 6,38 \cdot 10^6$ m, а земното ускорение е $g = 9,8$ m/s².

Решение. Ще смятаме системата ракета – Земя за затворена механична система, съставена от две тела (еднородно кълбо и материална точка), които взаимодействат с консервативни гравитационни сили. В този опростен модел пренебрегваме дисипативните сили на триене при движението на ракетата в земната атмосфера, както и влиянието на Слънцето и другите небесни тела. Тъй като масата на Земята M_3 е много по-голяма от масата на ракетата m ($M_3 \gg m$), ще смятаме, че центърът на масите на системата съвпада с центъра на Земята. Съгласно със закона за запазване на импулса центърът на масите на затворена система се движи праволинейно и равномерно или се намира в покой. Ще разглеждаме задачата в инерциална отправна система, в която центърът на масите, т.е. центърът на Земята, е в покой. Тогава кинетичната енергия на Земята е нула, а механичната енергия на системата е равна

на сумата от кинетичната енергия на ракетата и потенциалната енергия на гравитационното взаимодействие на ракетата със Земята

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM_3}{r}.$$

Коментар. Тъй като при взаимодействието на дадено тяло (ракета и др.) със Земята кинетичната енергия на Земята не се променя, често за краткост е по-удобно да говорим за механична енергия на отделното тяло, както това беше направено в §9. Не трябва да забравяме обаче, че се има предвид механичната енергия на системата тяло-Земя.

Съгласно с разглеждания модел в системата ракета-Земя не действат неконсервативни сили. Затова нейната механична енергия се запазва – енергията в произволен момент е равна на началната енергия:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM_3}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\gamma mM_3}{R_3}.$$

В зависимост от големината на началната скорост v_0 енергията E може да бъде както положителна, така и отрицателна или равна на нула. Ракетата ще се отдалечи на безкрайно голямо разстояние само ако $E \geq 0$. Действително, при $r \rightarrow \infty$ потенциалната енергия е нула. Тъй като кинетичната енергия е винаги

положителна, то $E = \frac{mv_\infty^2}{2} \geq 0$, където v_∞ е скоростта на ракетата, когато е безкрайно отдалечена. Минималната скорост $v_0 = v_2$, необходима за преодоляване на земното притегляне, съответства на случая $E = 0$. Тогава ракетата се отдалечава на безкрайност, където скоростта ѝ е нула ($v_\infty = 0$). От уравнението

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma mM_3}{R_3} = 0$$

определяме втората космическа скорост v_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_3}{R_3}} = \sqrt{2gR_3} = 11,2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

където сме отчели (вж.уравнение (5.3) на стр.36), че земното ускорение е $g = \frac{\gamma M_3}{R_3^2}$.

Пример 11.2. Дървено трупче с маса $M = 1990 \text{ g}$ е закачено на неразтеглива нишка. Куршум с маса $m = 10 \text{ g}$, който лети хоризонтално със скорост $v = 400 \text{ m/s}$, се забива в трупчето и остава в него. На каква максимална височина h ще се

издигне трупчето след удара (фиг. 11-1)?

Решение. При удара трупчето и куршумът взаимодействат с неконсервативни сили, при което част от механичната енергия се превръща в топлинна енергия. Затова не можем да приложим непосредствено закона за запазване на механичната енергия: на максималната височина h потенциалната енергия на трупчето със заседналия в него куршум е по-малка от началната кинетична енергия на куршума. При удара обаче се запазва импулсът на механичната система трупче-куршум. От закона за запазване на импулса следва уравнението

$$mv = (M + m)u,$$

откъдето определяме скоростта u на трупчето непосредствено след удара

$$u = \frac{m}{M + m}v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

След удара механичната енергия на системата (трупче с куршум – Земя) се запазва: кинетичната енергия, която трупчето със заседналия в него куршум има непосредствено след удара, се превръща в потенциална енергия, когато то достигне максималната си височина. От закона за запазване на енергията следва уравнението

$$(M + m)\frac{u^2}{2} = (M + m)gh,$$

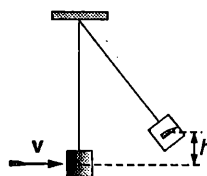
откъдето определяме височината h

$$h = \frac{u^2}{2g} = 0,2 \text{ m}.$$

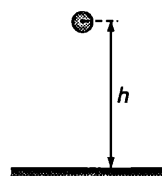
Пример 11.3. Топка от слонова кост е пусната от височина h , отскача от пода и се издига на същата височина (фиг.11-2). Проследете преобразуването на енергията по време на движението на топката.

Решение. Топката и Земята образуват механична система от две тела, които взаимодействат

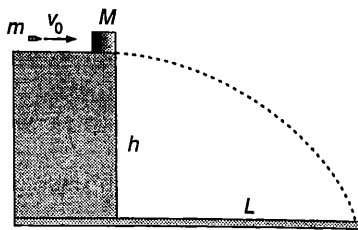
Фиг.11-1.



Фиг. 11.2.



ват с консервативни сили. При падането в резултат на работата на гравитационните сили гравитационната потенциална енергия се превръща в кинетична енергия и скоростта на топката нараства. По време на удара топката и пода взаимодействат с еластични сили. В първата част от удара топката и подът се деформират и кинетичната енергия се превръща в еластична потенциална енергия. През втората част от удара протича обратният процес – еластичната потенциална енергия се превръща отново в кинетична енергия и топката отскача нагоре. При издигането кинетичната енергия се превръща в потенциална енергия. Механичната енергия на системата през цялото време остава постоянна.



Фиг.11-4.

Задачи

1. Три топки са хвърлени от покрива на сграда с еднаква по големина начална скорост. Едната топка е хвърлена вертикално нагоре, втората – вертикално надолу, а третата – хоризонтално. Сравнете големините на скоростите, с които топките достигат земната повърхност. Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

2. Две топчета се хлъзгат без триене по гладки хоризонтални повърхности. В едната повърхност има вдлъбнатина, а в другата – издатина със същата форма и размери (фиг.11-3). В точките O двете топчета имат еднакви скорости.

а) Сравнете скоростите на топчетата в точките Q .

б) Пътят на двете топчета от O до Q е еднакъв. Еднакво ли е времето, за което те го изминават? Обяснете.

3. Топка е хвърлена вертикално нагоре с начална скорост v_0 . На каква височина кинетичната енергия на топката намалява два пъти? Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

4. Вертолет, летящ със скорост v , пуска контейнер, който достига земната повърхност със скорост $2v$. На каква височина лети вертолетът? Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

5. Трупче с маса $M = 990$ g е в покой върху

гладка хоризонтална опора, разположена на височина $h = 5$ m (фиг.11-4). В трупчето попада куршум с маса $m = 10$ g, който лети хоризонтално със скорост $v_0 = 500$ m/s и остава вътре в трупчето. На какво разстояние L от основата на опората ще падне трупчето?

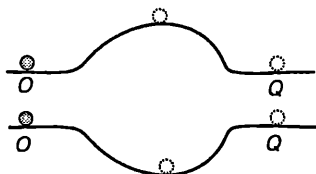
6. Две еднакви частици, които взаимодействат с консервативни сили, образуват затворена механична система. В даден момент, когато частиците се намират на определено разстояние една от друга, едната частица е в покой, а другата се движи в положителната посока на оста x със скорост v_0 . След известно време двете частици се намират на същото разстояние една от друга, но големината на скоростта на едната частица е $v_0/2$. Определете големината на скоростта на другата частица и посоките на векторите на скоростта на двете частици.

7. Ракета е изстреляна от земната повърхност с начална скорост $v_0 = 15 \cdot 10^3$ m/s. Колко ще бъде скоростта на ракетата, когато се отдалечи на много голямо разстояние от Земята? Съпротивлението на въздуха не се отчита.

8. Метеорит, който се движи в космическото пространство със скорост $v_0 = 2$ km/s, се захваща от гравитационното привличане на Луната. С каква скорост метеоритът ще падне върху лунната повърхност? Радиусът на Луната е $R_L = 1,74 \cdot 10^6$ m, а ускорението на свободно падане на лунната повърхност е $g_L = 1,6$ m/s².

9. Когато една звезда изчерпи ядреното си гориво, тя започва да се свива под действие на собствените си гравитационни сили и ако радиусът ѝ стане по-малък от т.нар. гравитационен радиус R_{gr} , звездата се превръща в „черна дупка“. Гравитационното привличане на „черните дупки“ е толкова силно, че никаква частица, дори и светлинен лъч, не може да напусне тяхната повърхност. За „черна дупка“ с радиус R_{gr} втората космическа скорост е равна на скоростта на светлината $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Представете си, че звезда, подобна на Слънцето (с маса $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg), се превръща в „черна дупка“. Пресметнете нейния гравитационен радиус R_{gr} .

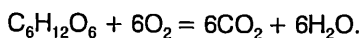
Фиг.11-3.



12. Превръщане на енергията при живите организми

Обмяна на веществата

Живите организми получават енергия при окислителните процеси на разграждане на въглехидрати, белтъчини и мазнини. Различните въглеводороди, които се съдържат в тях, се свързват с кислорода и в резултат на реакцията се получава вода и въглероден диоксид, при което част от химичната енергия, запасена в молекулите на изходните вещества, се преобразува в кинетична енергия на молекулите – продукти на реакцията. Например крайният резултат от окисляването на една молекула глюкоза може да се изрази с уравнението



При изгаряне на 1 g въглеродород се освобождава около 20 kJ химична енергия, по-голямата част от която се превръща в топлинна енергия, т.е. в кинетична енергия на хаотичното топлинно движение на молекулите. За да се осигурят нормални жизнени функции на организма, трябва да се поддържа определена скорост на окислителните процеси и на процесите на превръщане (изразходване) на енергията. Енергийните разходи на човека и топлокръвните животни в състояние на покой и топлинен комфорт (температура на околната среда 20°C) определят т. нар. *основна обмяна*. Мускулната работа значително увеличава разхода на енергия. Във физиологията се използват единиците за енергия калория (cal) и килокалория (1 kcal = 1000 cal). Връзката между единицата от SI за енергия джаул и килокалорията е:

$$1 \text{ kcal} = 4187 \text{ J}.$$

В таблица 12.1 е дадена скоростта, с която се изразходва енергията при някои човешки дейности. Използвана е възприетата в таблиците за хранене единица (kcal/min), както и съответстващата ѝ мощност P (1 J/s = 1 W). Увеличението ΔP на енергийните разходи над основната обмяна се нарича *работна добавка*. Само част от работната добавка, която ще означим

Таблица 12.1. Скорост на изразходване на енергията при различни човешки дейности (данните са за човек с маса 70 kg).

Вид дейност	kcal/min	P, W
Спане	1,2	84
Седене и четене	1,3	91
Личен тоалет	2,0	139
Каране на кола	2,8	195
Обличане	3,4	237
Миене на пода	4,9	341
Плевене	5,6	390
Цепене на дърва	7,5	522
Футбол	9,0	627
Бягане (8 km/h)	10	697

с ΔP_1 , се преобразува в механична мощност. Отношението

$$(12.1) \quad \eta = \frac{\Delta P_1}{\Delta P} \cdot 100\%$$

се нарича *коэффициент на полезно действие* (КПД). Той показва каква част от отделената допълнителна химична енергия се превръща в механична работа (останалата част се превръща в топлина). При човека КПД е в границите от 16 до 25%. За нетренираните хора той е нисък, а за някои професионални спортисти надминава 25%. За кратко време физически трениран човек може да поддържа механична мощност (например при спринтово бягане) около 200 W. При конете тази мощност е около 700 – 800 W, откъдето е произлязла и единицата за мощност *конска сила* (horsepower (hp)):

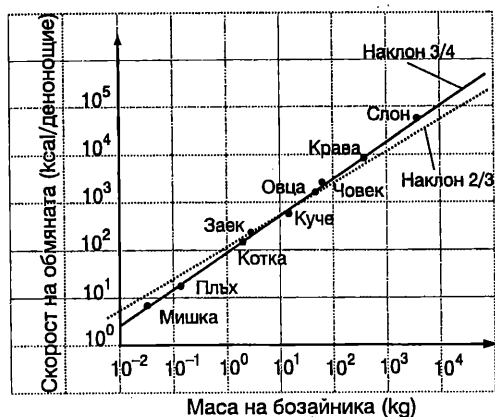
$$1 \text{ hp} = 750 \text{ W}.$$

Закон на Клайбер

През 1932 г. Клайбер, съпоставяйки голям брой експериментални данни за скоростта P на обмяната на веществата при бозайниците, установява, че тя зависи от масата m на бозайника по закона

$$(12.2) \quad P = Km^{\frac{3}{4}},$$

където K е константа. В двойнологоаритмичен мащаб законът на Клайбер (12.2) се представя графично с права линия (фиг.12-1).



Фиг.12-1. Зависимост на скоростта на обмяната на веществата от масата за някои бозайници (закон на Клайбер).

Метод на подобие в физиологията

Обмяната на веществата и превръщането на част от отделената химична енергия в механична работа се определя от сложни биохимични процеси в клетките на живите организми и е свързана с функционирането на голям брой различни мускули. Това прави количествената характеристика на тези процеси твърде сложна. Оказва се обаче, че с помощта на много прости модели и методи могат да се получат резултати, които добре обясняват някои от експериментално установените закономерности. Един от тези методи е методът на подобие, който се прилага във физиологията. Ще се спрем на неговия най-елементарен вариант и ще го използваме за установяване на зависимостта между отделената механична мощност P_m и масата m на бозайниците.

Същността на метода е в това, че всички бозайници се приемат за геометрично подобни. В най-простия вариант на метода се смята, че линейните размери на всички органи (дължина на крайниците, дължина на мускулите и т.н.) са правопрпорционални на някаква характерна за даденото животно дължина L . Всички сечения и повърхности (повърхност на кожата, напречно сечение на различните мускули и т.н.) са правопрпорционални на квадрата на характерната дължина ($\propto L^2$). Обемът V на органите е правопрпорционален на

L^3 . Приема се още, че масата m на животното и на всеки негов орган са правопрпорционални на обема на животното или на обема на съответния орган, т.е. $m \propto V \propto L^3$. Ако знаем масите на две животни, можем да пресметнем отношението на техните характерни дължини. Например за мишка с маса 0,030 kg и кон с маса 300 kg:

$$L_{\text{кон}}/L_{\text{мишка}} = (300\text{kg}/0,030\text{kg})^{1/3} = 21,5.$$

Такова е например приблизително отношението на дължините на крайниците на коня и мишката.

Как скоростта на обмяна зависи от характерната дължина L ? За да отговорим на този въпрос, ще използваме един интересен факт. Наблюденията показват, че независимо от голямата разлика в размерите на различните бозайници, те са в състояние да скочат приблизително на еднаква височина h . При скок от място отначало животното (същото се отнася и за човека) приклякля, при което центърът на масите C се понижава на разстояние d от нормалното му положение. След това в резултат на мускулното усилие тялото се движи ускорително, центърът на масите се издига и достига скорост v , когато тялото е изправено. После тялото се откъсва от земната повърхност и центърът на масите достига максимална височина h (над нормалното си положение), където скоростта му е нула. Съгласно със закона за изменение на енергията

$$(12.3) \quad E = mg(d + h);$$

$$(12.4) \quad \frac{mv^2}{2} = mgh,$$

където E е частта от отделената при обмяната химична енергия, която в резултат на механичната работа на мускулите е преобразувана в потенциална енергия $mg(h + d)$. Ще смятаме, че $h \gg d$ и ще пренебрегнем d в уравнение (12.3). Тогава

$$(12.5) \quad E \approx mgh.$$

Ще отбележим, че направеното приближение е добро за дребните животни и твърде грубо за едрите. Например при човека $d \approx h/2$. Тъй като за всички животни височината h на скока е приблизително еднаква, от уравнение (12.4) следва, че те се отделят от земята приблизително с

еднаква скорост v . Да означим с τ времето, през което мускулите извършват работа. Ще смятаме, че за време τ центърът на масите C се движи равноускорително (без начална скорост) и достига скорост v , след като измине път d . Средната скорост на C е $v/2$, а времето е $\tau = d/(v/2)$. Тъй като $v = \text{const}$, а съгласно с възприетия модел разстоянието d е правопропорционално на характерната дължина L , тогава $\tau = c_1 L$, където c_1 е константа. Отделената при скока механична мощност е

$$(12.6) \quad P_m = \frac{E}{\tau} = \frac{mgh}{c_1 L} = \frac{c_2 m}{L},$$

където $c_2 = gh/c_1$ е константа. Съгласно с модела $L = c_3 m^{1/3}$ (c_3 е друга константа) и уравнение (12.6) добива вида

$$(12.7) \quad P_m = \frac{c_2 m}{c_3 m^{1/3}} = c m^{2/3} \quad (c = \frac{c_2}{c_3} = \text{const}).$$

Както беше отбелязано, в механична мощност се преобразува част от отделената за единица време при обмяната на веществата химична енергия P ($P \propto P_m$). Затова може да се запише аналогично на (12.7) уравнение за скоростта на обмяната P

$$(12.8) \quad P = K m^{2/3}.$$

На *фиг.12.1* зависимостта (12.8) е представена с пунктирана линия. Сравняването на получения резултат със закона на Клайбер показва, че използваният елементарен модел задоволително обяснява зависимостта $P(m)$. Както ще видим в §23, моделът може да се усъвършенства, като се използват две характерни дължини, свързани по определен начин, и да се получи същият степенен показател (3/4), както в закона на Клайбер.

Бягане

При скок на височина в резултат на работата на мускулите част от отделената при обмяната на веществата химична енергия се преобразува в механична енергия (отначало кинетична, а след това потенциална). Когато обаче спортист бяга с постоянна скорост по хоризонтална писта, механичната му енергия е постоянна.

Защо тогава мускулите трябва непрекъснато да извършват механична работа, за да се поддържа постоянна скоростта на бягане? Бягането може да се разглежда като последователност от подскоци. При оттласкването от пистата мускулите извършват работа за ускоряване на краката и трупа и повдигане на центъра на тежестта на тялото. Тази механична енергия след това се преобразува в топлинна енергия при приземяването. Силите, които ускоряват и забавят различните части от тялото, се изменят по сложен начин и непосредствено то прилагане на законите на механиката за количествен анализ на процеса на бягане е невъзможно. Затова се прилагат различни опростени модели. Според един такъв модел, бегачът действа на настилка с резултантна сила F , насочена по посока на движението, чиято големина се изменя с течение на времето, но не може да надминава определена максимална стойност $F_{\max}$. Мощността на тази сила е $P_m = Fv$, където v е моментната скорост. Преобразуването на механичната енергия в топлинна енергия се извършва в резултат на действието на дисипативна сила, насочена в противоположна на скоростта посока, чиято големина f се приема за право-пропорционална на големината на скоростта: $f = cv$ ($c = \text{const}$). Бегачът може отначало да изразходва определен енергиен резерв E_0 . След като обаче този резерв се изчерпи, скоростта на бягане се ограничава от скоростта σ , с която постъпва допълнителна енергия, отделена при обмяната на веществата (приема се, че $\sigma = \text{const}$). В рамките на този модел математикът Келър определя оптималната сила F , с която спортистът трябва да действа на настилка, за да пробяга дадено разстояние за най-кратко време. След това съпоставя пресметнатите времена със световните рекорди за мъже на бягане на различни разстояния и определя стойностите на четирите константи на модела: $F_{\max}$, c , E_0 и σ . Накрая Келър използва получените стойности на четирите константи, за да пресметне най-добрите времена за пробягане на други разстояния. Оказва се, че получените от него стойности са много близки до регистрираните световни рекорди.

13. Удари

Ударът между макроскопични тела, както и процесите на разсейване, разпадане или сливане на атомни ядра или елементарни частици, се извършват за много кратко време. Силите на взаимодействие между телата (частиците) по време на удара обикновено са много по-големи от външните сили, които им действат. Затова действието на външните сили по време на удара може да се пренебрегне и двете тела да се разглеждат като затворена система, за която са в сила законите за запазване на енергията и импулса. Когато след удара общата кинетична енергия на двете тела не се изменя, ударът се нарича *абсолютно еластичен*. Ударът е нееластичен (или само частично еластичен), ако част от кинетичната енергия, която са имали телата преди удара, се преобразува във вътрешна енергия. Ако след удара телата се движат с еднаква скорост (като едно съставно тяло), ударът е *абсолютно нееластичен*.

Ударен импулс

Съгласно с третия принцип на механиката две тела при удар си взаимодействат с равни по големина и обратни по посока сили: $F_1 = -F_2$, където F_1 е силата, която действа на тялото 1, а F_2 – на тялото 2 (фиг.13-1). По време на удара силите на взаимодействие се изменят по сложен начин (фиг.13-2): отначало нарастват и достигат максимална стойност, когато двете тела са максимално деформирани, след това намаляват и стават равни на нула в края на удара. Да означим с τ времето на удара, $\tau = t_k - t_n$, където t_n и t_k са съответ-

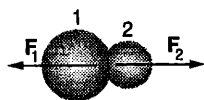
но началният и крайният момент на удара. Импулсът на променливата сила F_1 за безкрайно малкия интервал от време dt е $dJ = F_1 dt$. Импулсът на силата F_1 за цялото време на удара е

$$(13.1) \quad J = \int_{t_n}^{t_k} F_1 dt.$$

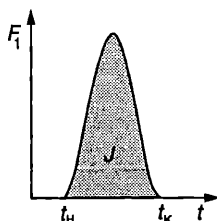
Величината J се нарича импулс на ударната сила или накратко *ударен импулс*. Големината на ударния импулс графично се задава от площта, заградена от графиката на функцията $F_1(t)$ и абсцисната ос (сивата площ на фиг.13-2).

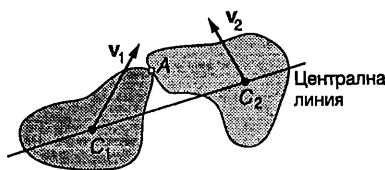
В реалния случай, ако в началото на удара контактът между двете тела е само в една точка, поради деформациите контактната площ нараства и се изменя по сложен начин по времето на удара. В телата също така се разпространяват механични вълни. Освен това контактуващите повърхности се приплъзват една спрямо друга и едновременно с това телата изминават известно разстояние по време на удара. Анализът съществено се опростява, ако използваме следния модел, наречен *импулсно приближение*: Ще смятаме, че времето на удара τ е безкрайно малко, а силите на взаимодействие – безкрайно големи. Ще поставим освен това условието да се изпълнява равенство (13.1), т.е. безкрайно голямата ударна сила за безкрайно малкия интервал от време τ да има краен импулс, равен на действителния ударен импулс J . Контактът по време на удара се осъществява само в една точка, а еластичните деформации при този опростен модел на удара са локализирани в безкрайно малки области от двете тела, разположени непосредствено около мястото на контакта. Според импулсното приближение изменението на скоростите на телата става мигновено и те не се преместват по време на удара. Освен това се пренебрегва действието на външните сили, тъй като за безкрайно малкия интервал от време τ техният импулс също е безкрайно малък. В много от важните за практиката случаи времето на удара τ между твърди тела (например стоманени топчета) действително е много малко

Фиг.13-1.



Фиг.13-2.





Фиг.13-3. Кос нецентрален удар между две твърди тела.

– от порядъка на 0,2 – 1 ms и импулсното приближение достатъчно точно описва такива удари.

Да означим с A точката, в която се извършва контактът (фиг.13-3). Линията, съединяваща центровете на масите C_1 и C_2 на двете тела, се нарича *централна линия*. Когато точка A лежи върху централната линия, ударът се нарича *централен*, в противен случай той е *нецентрален*. Когато скоростите на постъпателно движение на двете тела (скоростите на центровете на масите) са насочени в направление на централната линия, ударът е *челен* (пряк), а ако са под ъгъл спрямо централната линия – *кос* (непряк). На фиг.13-3 е показан кос нецентрален удар между две твърди тела.

Тъй като в импулсно приближение действието на външните сили по време на удара се пренебрегва, съгласно с втория принцип на механиката изменението на импулса на всяко едно от двете тела по време на удара е равно на импулса на ударната сила, която му действа:

$$(13.2) \quad m_1 u_1 - m_1 v_1 = J;$$

$$(13.3) \quad m_2 u_2 - m_2 v_2 = -J,$$

където m_1 и m_2 са масите на двете тела, v_1 и v_2 , u_1 и u_2 са скоростите на центровете на масите на телата съответно непосредствено преди удара и непосредствено след удара. J и $-J$ са импулсите на ударните сили на взаимодействие, които съгласно с третия принцип на механиката са равни по големина и противоположни по посока. Уравнения (13.2) и (13.3) могат да се обединят в едно уравнение, което изразява закона за запазване на импулса на системата от две тела

$$(13.4) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Абсолютно еластичен удар

Ще се ограничим с разглеждането на абсолютно еластичен удар между гладки тела с форма на сфера (например билиардни топки), които се движат постъпателно (без да се въртят). Ударът между сфери винаги е централен – допирната точка A лежи върху централната линия. Ще смятаме, че при удара не възникват сили на триене и топките си взаимодействат само със сили на нормална реакция, които са насочени перпендикулярно на тяхната повърхност, т.е. успоредно на централната линия. В направление на централната линия са насочени и съответните ударни импулси J и $-J$ (фиг.13-4). Тъй като линията на действие на ударните сили преминава през центъра на масите на топките, те не пораждат въртливо движение и след удара топките ще продължат да се движат само постъпателно.

При абсолютно еластичен удар се запазва кинетичната енергия на системата от две тела

$$(13.5) \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

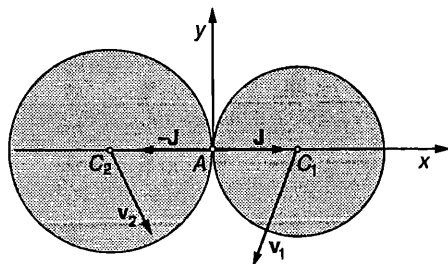
където m_1 и m_2 са масите на двете топки, v_1 и v_2 са техните скорости преди удара, а u_1 и u_2 – след удара. Ще преобразуваме уравнение (13.5) във вида

$$m_1(u_1 - v_1) \cdot (u_1 + v_1) + m_2(u_2 - v_2) \cdot (u_2 + v_2) = 0.$$

Съгласно с уравнения (13.2) и (13.3) $m_1(u_1 - v_1) = J$ и $m_2(u_2 - v_2) = -J$. След заместване в горното уравнение и прегрупиране на членовете получаваме

$$(13.6) \quad J[(v_1 - v_2) + (u_1 - u_2)] = 0,$$

Фиг.13-4.



където $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ е относителната скорост на двете топки непосредствено преди удара, а $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ е относителната им скорост непосредствено след удара. Ако изберем декартова координатна система, чиято ос x да е насочена по посока на ударния импулс $\mathbf{J}$, от уравнение (13.6) следва, че проекциите върху оста x на относителните скорости на двете топки преди и след удара са равни по големина и имат противоположни знаци

$$(13.7) \quad v_{1x} - v_{2x} = -(u_{1x} - u_{2x}).$$

В избраната координатна система ударните импулси $\mathbf{J}$ и $-\mathbf{J}$ нямат y -компоненти. Тогава от уравнения (13.6) и (13.7) следва, че

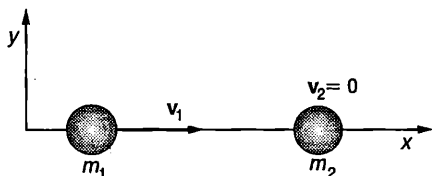
$$(13.8) \quad u_{1y} = v_{1y} \text{ и } u_{2y} = v_{2y}.$$

При пряк удар скоростите $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ са насочени в направление на централната линия, т.е. по оста x . Тогава $u_{1y} = v_{1y} = 0$ и $u_{2y} = v_{2y} = 0$, т.е. след удара двете топки ще се движат в същото направление, в което са се движили преди удара (по оста x). Тяхната относителна скорост също е насочена по оста x . От уравнение (13.7) следва, че относителната скорост само променя посоката си на противоположната, а големината ѝ не се изменя при удара. Това означава, че ако разглеждамеския удар в отправна система, свързана с една от топките, след удара втората топка се отдалечава със същата скорост, с която се е приближавала към неподвижната първа топка преди удара.

Пример 13.1. Топка с маса m_1 , която се движи със скорост $\mathbf{v}_1$, се удря в неподвижна топка с маса m_2 . Ударът е челен и абсолютно еластичен (фиг.13-5). Определете:

- а) скоростите на двете топки след удара;
- б) кинетичните енергии на двете топки след удара;

Фиг.13-5.



в) каква част η от кинетичната енергия на първата топка се предава на втората топка в резултат на удара.

Решение. а) При $v_2 = 0$ уравнение (13.7) за относителните скорости и проекцията върху оста x на векторното уравнение (13.4), изразяващо закона за запазване на импулса, добиват вида

$$v_1 = u_{2x} - u_{1x} \text{ и } m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x},$$

където сме отчели, че $v_{1x} = v_1$ и $v_{2x} = v_2 = 0$.

Коментар. Записването на векторно уравнение по компоненти обикновено се извършва по два начина: 1. Когато посоката на даден вектор (и на неговите компоненти) е предварително известна, за краткост в съответните уравнения компонентите директно се изразяват чрез модула на вектора. 2. Когато посоките на векторите не са известни предварително, компонентите им се записват в общ вид. Често е удобно двата начина на записване да се комбинират (както в разглежданата задача): компонентите на векторите с предварително известни посоки се изразяват чрез модулите на векторите, а компонентите на останалите вектори се записват в общ вид.

От горните две уравнения определяме x -компонентите на скоростите на двете топки след удара

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1; \quad u_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

От уравнението за u_{2x} следва, че $u_{2x} > 0$: след удара втората (неподвижната) топка се движи в положителната посока на оста x , т.е. в посоката, в която се е движила първата топка преди удара. В зависимост от масите, посоката на скоростта на първата топка след удара може да е различна. При $m_1 > m_2$ от уравнението за u_{1x} следва, че $u_{1x} > 0$, т.е. след удара първата топка продължава да се движи в положителната посока на оста x . Ако обаче нейната маса е по-малка от масата на неподвижната топка ($m_1 < m_2$), тогава $u_{1x} < 0$, което означава, че след удара първата топка се движи в противоположната посока – връща се обратно. В частния случай на еднакви маси $m_1 = m_2$: $u_{1x} = 0$ и $u_{2x} = v_1$. Този резултат е добре известен например на играчите на бiliarд – когато бiliarдна топка удари челно друга неподвижна топка, тя остава неподвижна на нейното място, а ударената топка започва да се движи в същата посока със същата скорост.

б) Кинетичните енергии на двете топки след удара са

$$E_{k1} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} E_{k0};$$

$$E_{к2} = \frac{m_2 u_{2к}^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{к0},$$

където $E_{к0} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ е кинетичната енергия на топката с маса m_1 преди удара.

в) Частта от кинетичната енергия, която неподвижната топка получава при удара, е

$$\eta = \frac{E_{к2}}{E_{к0}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Ще се спрем на някои гранични и частни случаи:

1. $m_2 \gg m_1$. Пренебрегваме m_1 в знаменателя на уравнението за η и получаваме

$$\eta \approx \frac{4m_1}{m_2}. \text{ Граничният случай на безкрайно го-}$$

ляма маса m_2 на неподвижната топка съответства на удар в стена. Тогава $\eta = 0$, т.е. стената не получава кинетична енергия.

2. $m_2 = m_1$. В този случай $\eta = 1$, т.е. при удара движещата се топка предава цялата си кинетична енергия на другата топка и остава неподвижна.

3. $m_1 \gg m_2$. Пренебрегваме m_2 в знаменателя на уравнението за η и получаваме

$$\eta \approx \frac{4m_2}{m_1}.$$

Пример 13.2. Докажете, че след непряк абсолютно еластичен удар между две еднакви билиардни топки, едната от които първоначално е била в покой, топките започват да се движат под прав ъгъл една спрямо друга (вж. корицата на учебника).

Решение. Да означим с p импулса на движещата се топка преди удара, а с p_1 и p_2 – импулсите на двете топки след удара (фиг.13-6). От закона за запазване на импулса на системата от две топки, $p = p_1 + p_2$, следва, че трите вектора p , p_1 и p_2 трябва да образуват триъгълник (фиг.13-7). Изразяваме кинетичната енергия

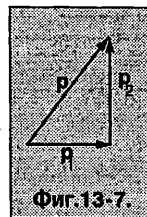
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Записваме уравнението, изразяващо закона за запазване на енергията при разглеждания случай на абсолютно еластичен удар

чрез импулса

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m},$$

откъдето следва, че $p^2 = p_1^2 + p_2^2$. Следователно за дължините на страните на триъгълника от фиг.13-7 е в сила питагоровата теорема, т.е. триъгълникът е правоъгълен (векторите p_1 и p_2 са взаимно перпендикулярни).



Фиг.13-7.

Абсолютно нееластичен удар

След абсолютно нееластичен удар двете тела се движат като едно цяло (фиг.13-8). Импулсът на системата, както при абсолютно еластичен удар, се запазва, но част от кинетичната енергия се губи, т.е. в резултат на пластичните деформации на телата при удара тя се преобразува във вътрешна енергия. Скоростта u на съставното тяло след удара можем да определим от закона за запазване на импулса, като положим в уравнение (13.4) $u_1 = u_2 = u$. Тогава

$$(13.9) \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

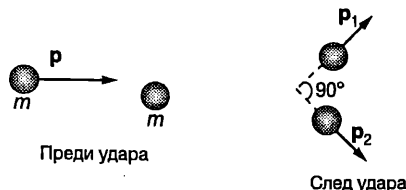
Ще разгледаме случая, когато преди удара тялото с маса m_2 е в покой ($v_2 = 0$). След удара двете тела се движат със ско-

рост $u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$. Кинетичната енергия на системата от две тела преди удара е

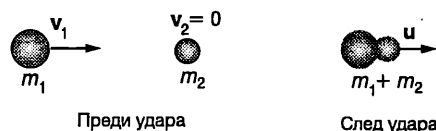
$$E_{к0} = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \text{ а след удара } E_k = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

След заместване на u получаваме

Фиг.13-6.



Фиг.13.8. Абсолютно нееластичен удар.



(13.10)

$$E_k = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_{k0}.$$

Изменението на кинетичната енергия в резултат на удара $-\Delta E$ (тъй като енергията намалява, $\Delta E < 0$ и $-\Delta E > 0$) е

$$-\Delta E_k = E_{k0} - E_k = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{k0}.$$

Отношението на преобразуваната (изгубена) при удара енергия към началната кинетична енергия на системата от две тела е

$$(13.11) \quad \frac{-\Delta E_k}{E_{k0}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

От това уравнение могат да се направят следните изводи:

1. Ако масата на движещото се тяло е много по-голяма от масата на неподвижното тяло ($m_1 \gg m_2$), загубата на кинетична енергия при удара е малка ($\frac{-\Delta E_k}{E_{k0}} \ll 1$).

2. При голяма маса на неподвижното тяло и малка маса на удрящото тяло ($m_2 \gg m_1$) почти цялата кинетична енергия се преобразува във вътрешна енергия $\frac{-\Delta E_k}{E_{k0}} \approx 1$.

Зависимостта (13.11) за преобразуване на енергията при абсолютно нееластичен удар се отчита например от каратистите. За да се достигне максимално поражение на уязвимото място на противника, ударът трябва да се нанесе така, че както началната кинетична енергия E_{k0} ,

така и отношението $\frac{-\Delta E_k}{E_{k0}}$ да са големи.

Ако каратистът приведе в движение цялото си тяло, тогава кинетичната му енергия е голяма, но ефектът от удара е малък, защото само малка част от тази кинетична енергия в резултат на работата на ударните сили се преобразува в енергия на пластичните деформации, т.е. предизвиква поражение. Освен това след удара движението не се прекратява, което може да доведе до загуба на равновесие, особено ако противникът успее частично да избегне удара. Затова каратистите рядко използват тялото, за да увеличат силата на удара. Те привеждат в движение главно

предната част на ръката и нанасят удара в момента, когато скоростта ѝ е максимална. Нейната маса е малка, а скоростта достига 6–7 m/s. Тогава поразяващият ефект е максимален, защото практически цялата кинетична енергия се използва за предизвикване на деформации.

Задачи

1. На фиг.13-9 с приближение е показана зависимостта от времето на ударната сила, която възниква при удара на топка за тенис с маса $m = 60$ g в стена. Началната скорост на топката е $v = 30$ m/s и е насочена перпендикулярно към стената. След удара топката отскача в противоположната посока със същата по големина скорост. Определете максималната стойност на ударната сила $F_{\max}$.

2. Частича с импулс $\mathbf{p}_1 = p_0 \mathbf{i} + 2p_0 \mathbf{j}$ се удря и се слива с частича с импулс $\mathbf{p}_2 = 2p_0 \mathbf{i} + p_0 \mathbf{j}$. В каква посока се движи получената след сливането нова частича?

3. Поток от неутрони попада върху мишена, съдържаща въглерод. Ударите между неутроните и неподвижните атоми на въглерода са преки и абсолютно еластични.

а) Определете отношението E_{k1}/E_{k0} на кинетичната енергия на неутроните след удара към тяхната начална кинетична енергия E_{k0} .

б) След колко такива удара енергията на един неутрон ще намалее 10^6 пъти?

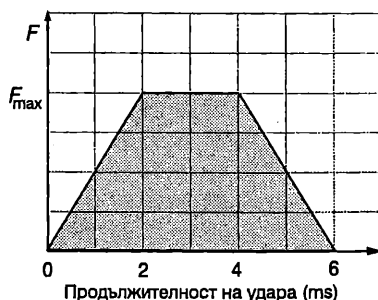
4. Две еднакви оловни топки, всяка с маса $m = 0,1$ kg, се движат с еднакви по големина скорости $v_1 = v_2 = 5$ m/s, чиито посоки са взаимно перпендикулярни. Двете топки претърпяват абсолютно нееластичен удар. Определете:

а) скоростта u на топките след удара.

б) скоростта на центъра на масите на системата от две топки преди удара и след удара.

в) отделеното при удара количество топлина.

Фиг.13-9.



14. Закон за запазване на момента на импулса

Момент на сила и момент на импулса спрямо точка

Да вземем произволна точка O , която ще наречем начало или полюс. В точка A с радиус-вектор r , определен спрямо началото O , е приложена сила F . Правата, която минава през точка A и е успоредна на вектора F , се нарича *линия на действие на силата F* (фиг.14-1а). Векторната величина M , равна на векторното произведение на r и F

$$(14.1) \quad M = r \times F$$

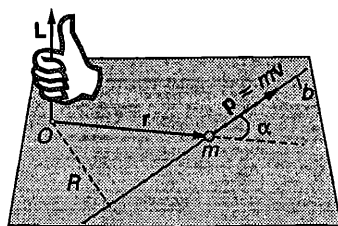
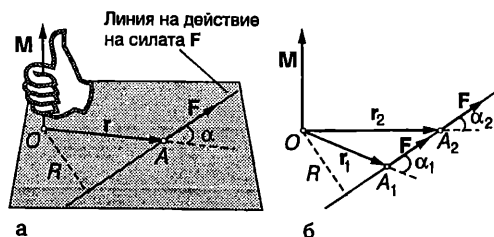
се нарича *момент на силата F спрямо точка O* . Векторът M е перпендикулярен на векторите r и F , т.е. на равнината, определена от точка O и линията на действие на силата F . Посоката на M се определя по правилото на дясната ръка, а модулт му е

$$(14.2) \quad M = rF \sin \alpha = FR,$$

където α ($\alpha \leq 180^\circ$) е ъгълът между векторите r и F , $R = r \sin \alpha$ е разстоянието от точка O до линията на действие на силата F (фиг.14-1а). От фиг.14-1б се вижда, че ако се премества приложната точка A на силата по линията на действие, без да се променя нейната големина и посока, моментът M на силата спрямо точка O не се изменя. Действително, за всички точки от линията на действие на силата $R = \text{const}$ и съгласно с уравнение (14.2) M също е константа.

По аналогичен начин се въвежда величината момент на импулса. Нека в даден момент частица с маса m има радиус-

Фиг.14-1.



Фиг.14-2.

вектор r , скорост v и импулс $p = mv$, определени спрямо началото O . Векторното произведение

$$(14.3) \quad L = r \times p = r \times (mv)$$

се нарича *момент на импулса* на материалната точка спрямо началото O (фиг.14-2). Големината и посоката на момента на импулса L се определят по същия начин, както големината и посоката на момента на силата M .

Уравнение за моментите спрямо неподвижна точка

Материална точка се движи под действие на сила F . Да означим с M и L момента на силата и момента на импулса на материалната точка спрямо произволен полюс O . Ще покажем, че когато полюсът O е в покой спрямо инерциална отправна система, между величините L и M съществува проста връзка, която изразява втория принцип на механиката за движението на материалната точка спрямо полюса O . За целта ще диференцираме двете страни на векторното уравнение (14.3) по времето t

$$(14.4) \quad \frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt}.$$

Първият член от дясната страна на полученото равенство е нула, защото векторите $dr/dt = v$ и $p = mv$ са колинеарни. Тъй като отправната система, свързана с полюса O , е инерциална, за нея е в сила вторият принцип на механиката: $F = dp/dt$. След заместване получаваме уравнението за моментите

$$(14.5) \quad \frac{dL}{dt} = r \times F$$

или

(14.6)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Съгласно с уравнението за моментите (14.6) първата производна по времето на момента на импулса на материална точка е равна на момента на действащата сила. Ще подчертаем, че моментите $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ се определят спрямо една и съща неподвижна точка O . Ако точка O се движи с ускорение, свързаната с нея отправна система е неинерциална и уравнението $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ на втория принцип, което използвахме, за да изведем уравнението за моментите (14.6), не е в сила.

Когато на материална точка действат няколко сили $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N$, в уравнението за моментите (14.6) трябва да се постави векторната сума от моментите на всички

$$\text{сили: } \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \text{ където}$$

сме отчели, че всички сили са приложени в една и съща точка с радиус-вектор $\mathbf{r}$. Следователно векторната сума $\mathbf{M}$ от моментите на всички сили е равна на мо-

$$\text{мента на резултантната сила } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i:$$

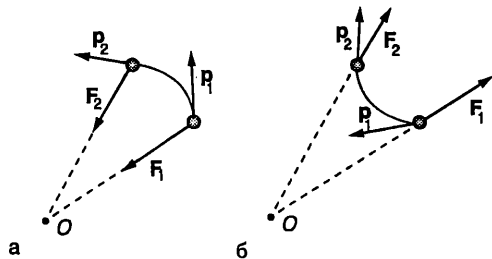
$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Затова, в случая на отделна материална точка, е по-удобно най-напред да се определи резултантната на всички сили, които ѝ действат, а след това да се пресметне нейният момент.

Движение на материална точка под действие на централна сила

От уравнението за моментите (14.6) следва, че когато моментът на резултантната сила е нула ($\mathbf{M} = 0$), моментът на импулса на материалната точка не се изменя с течение на времето, т.е. $\mathbf{L} = \text{const}$. Възможни са два случая, при които $\mathbf{M} = 0$:

1. Резултантната сила е нула или изобщо не действат сили ($\mathbf{F} = 0$). Тогава материалната точка се движи праволинейно и равномерно по инерция. Моментът на импулса $\mathbf{L}$ е насочен перпендикулярно на равнината, определена от началото O и правата b , по която се извършва движението (фиг.14-2). Големината му е

$$L = rps \sin \alpha = Rp = \text{const},$$



Фиг.14-3. Движение под действие на централна сила.

където $R = r \sin \alpha$ е разстоянието от началото O до правата b .

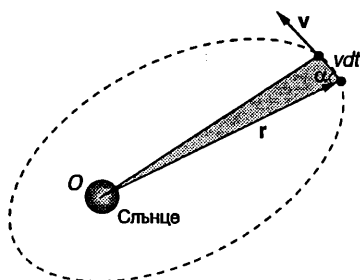
2. Векторите $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ са колинеарни. Тогава тяхното векторно произведение е нула ($\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$). Това означава, че през цялото време на движение силата $\mathbf{F}$ е насочена към точка O (фиг.14-3а) или в противоположната посока (фиг.14-3б). Такава сила се нарича *централна сила*, а точка O – *силов център*. Материалната точка може да се привлича (фиг.14-3а) или да се отблъсква (фиг.14-3б) от силовия център. И в двата случая централната сила не променя момента на импулса на материалната точка, независимо че изменя големината и посоката на скоростта (импулса).

Пример 14.1. Като анализира резултатите от астрономически наблюдения, през XVII век Йохан Кеплер получава следните три емпирични закона за движението на планетите около Слънцето:

1. Всяка планета се движи по елипса, в един от фокусите на която се намира Слънцето.
2. Радиус-векторите на планетите за равни интервали от време описват равни площи.
3. Квадратите на периодите на въртене на планетите се отнасят както кубовете на големите полуоси на орбитите им.

Докажете, че вторият закон на Кеплер е непосредствено следствие от факта, че гравитационните сили са централни.

Решение. Слънцето действа на планетата с гравитационна сила, която е насочена към неговия център O (фиг. 14-4). Няма да отчитаме движението на Слънцето и ще приемем силовия център за неподвижен. Тогава моментът на импулса $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ на планетата спрямо неподвижната точка O остава постоянен по големина и посока. Модулът на вектора $\mathbf{L}$ е $L = rmv \sin \alpha$. За време dt планетата изминава разстояние vdt , а



Фиг. 14-4.

радиус-векторът r описва площ dS , равна на площта на сивия триъгълник от фиг. 14-4

$$dS = \frac{rv dt \sin \alpha}{2} = \frac{L}{2m} dt.$$

За единица време радиус-векторът описва площ (площна скорост)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

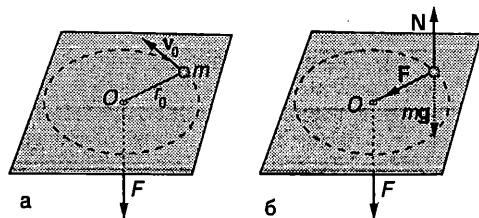
Тъй като площната скорост е постоянна, за равни интервали от време радиус-векторът на планетата ще описва еднакви площи. С това вторият закон на Кеплер е доказан. При доказателството използвахме единствено факта, че гравитационните сили са централни. За да се получат останалите два закона, трябва да се отчете, че големината на гравитационните сили намалява по закона на обратните квадрати ($F \propto 1/r^2$).

Пример 14.2. Топче (материална точка) с маса m е завързано за тънка нишка и се движи върху хоризонтална равнина със скорост v_0 по окръжност с радиус r_0 . През малък отвор O нишката бавно се изтегля, докато радиусът на въртене стане r (фиг. 14-5а). Триенето се пренебрегва. Определете:

- скоростта, с която ще се движи топчето по новата окръжност;
- работата на външната сила F .

Решение. На фиг. 14-5б са показани силите, които действат на топчето. Силата на тежест-

Фиг. 14-5.



та mg се уравновесява от силата на нормална реакция N на опората. Резултантната сила е равна на силата на опъване F , която през цялото време е насочена към неподвижната точка O . Следователно движението се извършва под действие на централна сила и моментът на импулса на топчето не се изменя:

$$L = r_0 m v_0 = m r v,$$

където сме отчели, че при движение по окръжност скоростта е перпендикулярна на радиус-вектора.

а) От горното уравнение изразяваме търсената скорост $v = r_0 v_0 / r$.

б) Работата на външната сила е равна на изменението на кинетичната енергия на топчето: $A = m v^2 / 2 - m v_0^2 / 2$. Заместваме v и получаваме:

$$A = \frac{m v_0^2}{2} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right).$$

Тъй като $r_0 > r$, външната сила извършва положителна работа и скоростта (кинетичната енергия) на топчето нараства. Не стигнахме ли до противоречие? Нали при движение по окръжност силата е насочена перпендикулярно на скоростта и не извършва работа? Противоречие няма, защото топчето се движи по окръжност само в началния и в крайния момент. През времето, когато се изтегля нишката, r се изменя, траекторията не е окръжност, а векторите v и r не са взаимно перпендикулярни.

Уравнение за моментите на системата от материални точки

Да разгледаме система от N материални точки, които взаимодействат помежду си и едновременно с това са подложени на действието на външни сили. Нека O е неподвижен полюс. Записваме уравнението за моментите (14.6) на произволна материална точка от системата (например i -тата):

$$\frac{dL_i}{dt} = M_{i\text{външ.}} + M_{i\text{вътр.}}$$

където L_i е нейният момент на импулса. $M_{i\text{външ.}}$ и $M_{i\text{вътр.}}$ са векторните суми от моментите съответно на всички външни сили и на всички вътрешни сили, които действат на материалната точка. Аналогични уравнения можем да запишем за всички останали материални точки и да съберем почленно левите им и десните им страни.

Получаваме

$$(14.7) \quad \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i\text{външ.}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i\text{вътр.}}$$

Векторната сума от моментите на импулса на всички материални точки се нарича **момент на импулса на механичната система**

$$(14.8) \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i.$$

Да разгледаме две произволни материални точки от системата. Съгласно с третия принцип на механиката те си взаимодействат с равни по големина и противоположни по посока сили, $\mathbf{F}_i = -\mathbf{F}_j$, които са насочени по правата, съединяваща двете материални точки (фиг.14-6). Такива сили на взаимодействие са централни – всяка частица играе ролята на силов център, към който се привличат или отблъскват останалите частици. Сумата от моментите на двете сили спрямо полюса O е

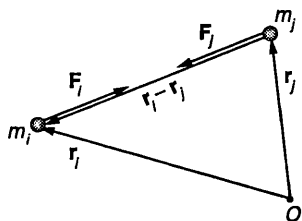
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_j &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j = \\ &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_j \times (-\mathbf{F}_i) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_i \end{aligned}$$

Тъй като векторите $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ и $\mathbf{F}_i$ са колинеарни (фиг.14-6), тяхното векторно произведение е нула: $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_i = 0$. Този резултат е в сила за всяка двойка от материални точки. Следователно векторната сума от моментите на всички вътрешни сили на взаимодействие между частиците от системата също е нула

$$(14.9) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i\text{вътр.}} = 0.$$

След отчитане на равенства (14.8) и (14.9) уравнение (14.7) добива вида

Фиг.14-6.



$$(14.10) \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i\text{външ.}}$$

Уравнение (14.10) се нарича **уравнение за моментите на система от материални точки: първата производна на импулса на система от материални точки е равна на векторната сума от моментите на всички външни сили, действащи на системата**. Всички моменти се определят спрямо един и същ полюс O , който е в покой относно инерциална отправна система.

*Доказва се, че когато полюсът O се движи, уравнението за моментите на система от материални точки е (вж. Пример 14.3)

$$(14.11) \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i\text{външ.}} - m(\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_C),$$

където m е масата на системата, $\mathbf{v}_O$ е скоростта на полюса O спрямо дадена инерциална отправна система K , а $\mathbf{v}_C$ е скоростта на центъра на масите C на системата от материални точки (също спрямо K -системата). При пресмятане на момента на импулса $\mathbf{L}$ на системата скоростите на материалните точки се определят спрямо инерциалната отправна система K , а не спрямо движещия се полюс O .

Ще отбележим един важен частен случай, когато полюсът O съвпада с центъра на масите на системата. Тогава неговата скорост е равна на скоростта на центъра на масите ($\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C$) и вторият член в дясната страна на уравнението за моментите (14.11) е нула. Следователно уравнението за моментите, записано спрямо центъра на масите C на система от материални точки, има същия вид (14.10), както относно неподвижен полюс. При това няма значение дали центърът на масите е в покой или се движи с ускорение. Нещо повече, в този случай скоростите на материалните точки могат да се определят както спрямо дадена инерциална отправна система K , така и в отправната система, свързана с центъра на масите C , дори когато последната е неинерциална. Действително, скоростта на i -тата материална точка спрямо K -системата е $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i'$ където $\mathbf{v}_i'$ е относителната скорост на материалната точка спрямо центъра на ма-

сите на системата. Тогава

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}'_i.$$

Преобразуваме първия член от дясната страна на това уравнение

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_C = -\mathbf{v}_C \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = -\mathbf{v}_C \times m \mathbf{r}_C.$$

Тъй като по условие началото O съвпада с центъра на масите, $\mathbf{r}_C = 0$, и този член е нула. Следователно

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}'_i.$$

Пример 14.3. Докажете, че уравнението за моментите на система от материални точки спрямо движещо се начало O се изразява с формула (14.11).

Решение. Точка O_1 е неподвижна спрямо инерциална отправна система K , а точка O се движи спрямо K (фиг.14-7). Да означим с $\mathbf{r}_{i1}$ и $\mathbf{r}_i$ радиус-векторите на i -тата материална точка съответно спрямо двата полюса O_1 и O . От векторния триъгълник на фиг.14-7 се вижда, че $\mathbf{r}_{i1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_O$, където $\mathbf{r}_O$ е радиус-векторът на точка O , прекаран от началото O_1 . Моментът на импулса на материалната точка спрямо O_1 е

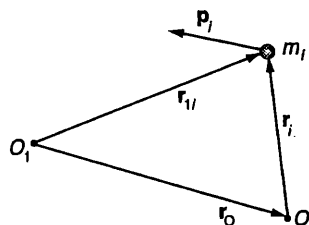
$$(14.12) \quad \mathbf{L}_{i1} = \mathbf{r}_{i1} \times \mathbf{p}_i = \mathbf{L}_i + \mathbf{r}_O \times \mathbf{p}_i,$$

където $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ е моментът на импулса спрямо движещия се полюс O (и в двата случая импулсът на материалната точка $\mathbf{p}_i$ се определя спрямо инерциалната отправна система K). По аналогичен начин за резултантния момент на всички сили, действащи на i -тата материална точка, получаваме

$$(14.13) \quad \mathbf{M}_{i1} = \mathbf{M}_i + \mathbf{r}_O \times \mathbf{F}_i,$$

където $\mathbf{F}_i$ е резултантната сила, а $\mathbf{M}_{i1}$ и $\mathbf{M}_i$ са нейните моменти спрямо полюсите O_1 и O . Ди-

Фиг.14-7.



ференцираме двете страни на равенство (14.12) по времето и получаваме

$$\frac{d\mathbf{L}_{i1}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_O \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Тъй като импулсът се определя спрямо инерциалната отправна система K , в сила е уравнението на втория принцип на механиката $\mathbf{F}_i = d\mathbf{p}_i/dt$. Освен това $d\mathbf{r}_O/dt = \mathbf{v}_O$. След заместване в горното уравнение получаваме

$$(14.14) \quad \frac{d\mathbf{L}_{i1}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} + \mathbf{v}_O \times \mathbf{p}_i + \mathbf{M}_{i1} - \mathbf{M}_i,$$

където сме отделили уравнение (14.13). Записваме аналогични на уравнение (14.14) уравнения за останалите материални точки и ги събираме

$$(14.15) \quad \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{L}_{i1}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_O \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i1} - \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i.$$

След като отчетем, че

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{L}_{i1}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i1}$$

(уравнение за моментите на системата спрямо неподвижното начало O_1) и

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_O \times \mathbf{p}_i = \mathbf{v}_O \times \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \mathbf{v}_O \times m \mathbf{v}_C,$$

окончателно получаваме

$$(14.16) \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i - m(\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_C).$$

По аналогичен начин, както при неподвижно начало, може да се докаже, че общият момент на всички вътрешни сили спрямо подвижното начало е нула. Тогава уравнение (14.16) преминава в уравнение (14.11) за моментите на система от материални точки спрямо подвижен полюс. С това доказателството е завършено. *

Закон за запазване момента на импулса

Ако сумарният момент на всички външни сили, действащи на система от материални точки, е нула, уравнението за моментите (14.10) добива вида $d\mathbf{L}/dt = 0$, откъдето следва, че моментът на импулса на системата не се изменя с течение на времето ($\mathbf{L} = \text{const}$). В частния случай, когато системата е затворена, външни сили изобщо не действат и моментът на импулса не се изменя. Този резултат изразява закона за запазване момента на импулса в

механиката, който гласи:

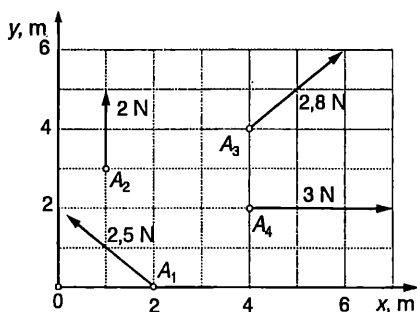
Моментът на импулса на затворена система от материални точки, които взаимодействат помежду си с централни сили, не се изменя с течение на времето.

В класическата механика законите за запазване на енергията, импулса и момента на импулса на затворена система от материални точки се получават като следствия от законите на Нютон (трите принципа на механиката). Тяхната област на приложимост обаче излиза извън рамките на класическата механика. Законът за запазване момента на импулса, подобно на законите за запазване на енергията и импулса, е един от фундаменталните закони на физиката. Момент на импулса имат не само макроскопичните тела и системи, но и отделните атоми, ядра и елементарни частици. В квантовата физика понятието момент на импулса се разширява и се използва за описване свойствата на микрочастиците, за които законите на нютоновата механика не са в сила.

Задачи

1. Определете моментите на силите, приложени в точките A_1 , A_2 , A_3 и A_4 (фиг.14-8), спрямо началото O на координатната система. Колко е общият момент на всички сили? Каква е неговата посока?
2. Спрямо дадена точка O частица има радиус-вектор $\mathbf{r}$, чийто модул е 2 m. На частицата действа сила $\mathbf{F}$ с модул 3 N. Определете ъгъла между векторите $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, ако модулът на момента на силата $\mathbf{F}$ спрямо точка O е: а) 0; б) 6 N·m.

Фиг.14-8.



3. Две частици с маси m и $2m$ се движат с еднаква скорост v в противоположни посоки по две успоредни прави, разположени на разстояние d една от друга. Определете модула на момента на импулса на системата от две частици спрямо точка, разположена по средата между двете прави.

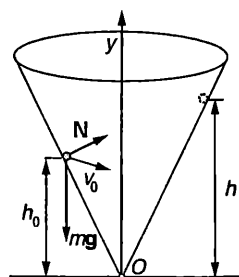
4. Пресметнете момента на импулса спрямо центъра на Земята на човек с маса 80 kg, който се намира на екватора.

5. Моментът на импулса на частица спрямо началото на координатната система се изменя с течение на времето t по закона $\mathbf{L} = c_1 \mathbf{i} + c_2 t^2 \mathbf{j}$, където c_1 и c_2 са положителни константи. Определете: а) x - и y -компонентите на момента $\mathbf{M}$ на силата, действаща на частицата, като функция на времето; б) модула на вектора $\mathbf{M}$ в момента, когато векторите $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ сключват помежду си ъгъл 45° .

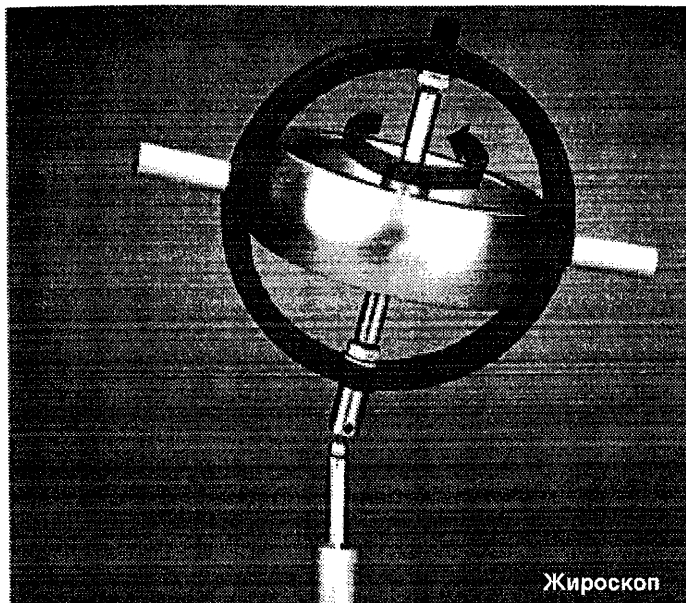
6. Малко топче се хлъзга без триене по вътрешната повърхност на конична фуния, чиято ос е вертикална. В началния момент топчето се намира на височина h_0 и се движи със скорост v_0 , която е насочена хоризонтално (фиг. 14-9). При по-нататъшното си движение топчето достига максимална височина h , след което започва да се спуска надолу. Определете: а) скоростта v_0 ; б) скоростта v на топчето на височина h .

Указание. На топчето действат две сили: силата на тежестта mg и силата на нормална реакция на опората N (фиг.14-9). Моментите на тези две сили спрямо върха O на конуса са насочени перпендикулярно на вертикалната ос y . Затова y -компонентата на сумарния момент на силите, действащи на материалната точка, е нула, откъдето следва, че y -компонентата на нейния момент на импулса се запазва. Използвайте също закона за запазване на механичната енергия и факта, че в най-горната точка скоростта v на топчето също е насочена хоризонтално. (В най-горната точка става промяна на посоката на вертикалното движение на топчето, поради което вертикалната компонента на скоростта е нула.)

Фиг.14-9.



Механика на твърдо тяло



Досега разглеждахме движението на отделна материална точка и някои най-общи закономерности при движението на система от материални точки. В тази глава ще се спрем на най-простите за анализ случаи на движение на идеално твърдо тяло. В механиката идеално твърдо тяло се нарича система от материални точки, относителните разстояния между които остават неизменни при произволно движение на системата като цяло. При всички взаимодействия с околните тела формата и обемът на идеално твърдото тяло остават постоянни. В действителност формата и обемът на реалните тела се изменят под действието на сили – те се деформират и в тях се разпространяват механични вълни. В редица важни за практиката случаи обаче деформациите са малки и може да не се отчитат. Тогава за изучаване движението на реалните твърди тела се използва опростеният механичен модел на недеформируемо (идеално) твърдо тяло. За краткост вместо идеално твърдо тяло ще казваме само твърдо тяло.

15. Въртене на твърдо тяло около неподвижна ос

Ъглова скорост

За описване движението на твърдо тяло ще използваме две отправни системи: инерциална отправна система K_1 и неинерциална отправна система K , чиито оси са неподвижно свързани с твърдото тяло. Началото на K може да се избере произволно, дори извън тялото. В повечето случаи обаче е най-удобно то да съвпада с центъра на масите C на тялото (фиг.15.1). Всички точки от тялото по определение са в покой спрямо K . Произволно движение на отправната система K (т.е. на тялото) може да се представи като сума от две движения:

1. *Постъпателно движение*, при което координатните оси на K -системата не променят ориентацията си в пространството. За описване на постъпателното движение е достатъчно да се определи траекторията на началото C .

2. *Въртене* на K с ъглова скорост ω около моментна ос, минаваща през C .

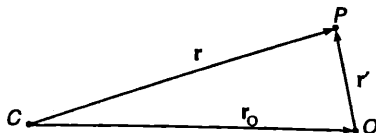
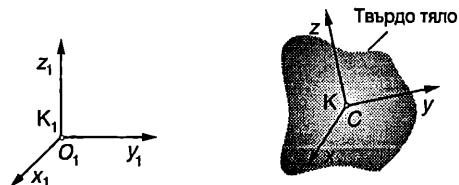
Тъй като всички точки от тялото са в покой спрямо отправната система K , абсолютната скорост $\mathbf{v}_a$ на произволна точка P от тялото е равна на нейната преносна скорост (вж. уравнение (6.2) на стр. 43)

$$(15.1) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r},$$

където $\mathbf{v}_C$ е скоростта на началото C на K , а вторият член изразява преносната скорост на точка P , свързана с въртенето на K -системата.

Теорема. *Ъгловата скорост ω не зависи от избора на началото на неинерциалната отправна система K , чиито оси са неподвижно свързани с твърдото тяло.*

Фиг.15-1.



Фиг.15-2.

Доказателство. Разглеждаме две неинерциални отправни системи – K и K' , чиито оси са неподвижно свързани с твърдото тяло. Началото на K е в центъра на масите C , а на K' – в произволна точка O с радиус-вектор $\mathbf{r}_O$ (спрямо C). Да допуснем, че в даден момент K се върти с ъглова скорост ω , а K' се върти с друга ъглова скорост ω' . Тогава от уравнение (15.1) абсолютната скорост на произволна точка P от тялото може да се изрази по два начина (фиг.15-2):

$$(15.2) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r};$$

$$(15.3) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_O + \omega' \times \mathbf{r}'.$$

Съгласно с уравнение (15.1) абсолютната скорост на точка O е

$$(15.4) \quad \mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r}_O.$$

Заместваме $\mathbf{v}_O$ от уравнение (15.4) в (15.3) и приравняваме десните страни на уравнения (15.2) и (15.3). Получаваме

$$(15.5) \quad \omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) = \omega' \times \mathbf{r}'.$$

От фиг.15-2 се вижда, че $\mathbf{r} - \mathbf{r}_O = \mathbf{r}'$. Следователно $\omega \times \mathbf{r}' = \omega' \times \mathbf{r}'$ или

$$(15.6) \quad (\omega - \omega') \times \mathbf{r}' = 0.$$

Тъй като точка P е избрана произволно (произволен $\mathbf{r}'$), уравнение (15.6) има решение само ако $\omega - \omega' = 0$, т.е. при $\omega = \omega'$.

С това теоремата е доказана. От нея следва, че в даден момент от времето всички отправни системи, чиито оси са неподвижно свързани с твърдото тяло, се въртят с еднаква ъглова скорост ω , т.е. техните моментни оси на въртене са успоредни една на друга и въртенето се извършва с еднаква по големина ъглова скорост. Скоростта на постъпателно движение на моментните оси на въртене е различна – тя е равна на абсолютната скорост на точката, в която е избрано началото на съответната неинерциална отправна система. Еднаквата ъглова скорост на всички неинерциални отправни системи, чиито ко-

ординатни оси са неподвижно свързани с твърдото тяло, дава възможност да придадем на ъгловата скорост ω абсолютен характер, т.е. да не се уточнява въртенето на коя от свързаните с тялото неинерциални отправни системи се разглежда и да се нарече ω *ъглова скорост на въртене на твърдото тяло*.

Въртене на твърдо тяло около неподвижна ос

Ще разгледаме частния случай, когато ъгловата скорост ω на твърдо тяло не променя направлението си с течение на времето, а началото O на една от неинерциалните отправни системи, чиито оси са неподвижно свързани с твърдото тяло, остава в покой спрямо дадена инерциална отправна система K_1 . Тогава можем да изберем началото на K_1 също в точка O , а осите z_1 и z на двете отправни системи да са успоредни на ω (фиг.15-3). Тъй като по условие направлението на вектора ω не се изменя, осите z и z_1 ще съвпадат през цялото време на движението (ω може да се изменя по големина и да сменя посоката си на противоположната). Такова движение на твърдото тяло се нарича въртене около неподвижната ос z .

Записваме уравнението за моментите (14.10) спрямо неподвижната точка O

$$(15.7) \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

където $\mathbf{L}$ е моментът на импулса на тялото ($\mathbf{L}$ е векторната сума от моментите на импулса на всички материални точки, на които мислено може да се разбие твърдото тяло), а $\mathbf{M}$ е векторната сума от моментите на всички външни сили, действащи на твърдото тяло. Проекцията на векторното

уравнение (15.7) върху оста на въртене z е

$$(15.8) \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

където L_z и M_z са z -компонентите на векторите $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$.

Да разгледаме малък елемент от тялото (материална точка) с маса m_i , радиус-вектор $\mathbf{r}_i$, скорост $\mathbf{v}_i$ и момент на импулса $\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ (фиг.15-3). Проекцията на вектора $\mathbf{L}_i$ върху оста на въртене е

$$L_{iz} = L_i \cos \theta = m_i r_i v_i \cos \theta,$$

където сме отчели, че векторите $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{v}_i$ са взаимно перпендикулярни. Заместваме (вж. фиг.15-3) $v_i = \omega R_i$, $r_i = R_i / \cos \theta$ и получаваме: $L_{iz} = \omega m_i R_i^2$, където R_i е разстоянието от разглеждания елемент до оста на въртене. Проекцията L_z на момента на импулса на твърдото тяло е равна на алгебричната сума от проекциите (компонентите) на момента на импулса на всички малки елементи, на които сме разбили тялото

$$(15.9) \quad L_z = \sum L_{iz} = \omega \sum m_i R_i^2 = \omega I_z.$$

Величината

$$(15.10) \quad I_z = \sum m_i R_i^2$$

се нарича *инерчен момент* на твърдото тяло спрямо неподвижната ос на въртене z . Заместваме L_z от уравнение (15.9) в (15.8) и получаваме уравнението за въртене на твърдо тяло около неподвижна ос

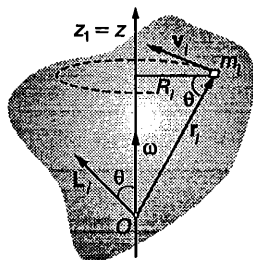
$$(15.11) \quad I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

или

$$(15.12) \quad I_z \varepsilon = M_z,$$

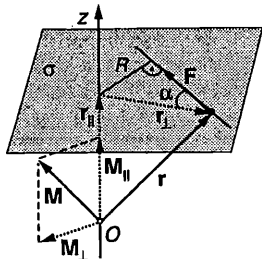
където $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ е ъгловото ускорение.

Фиг.15-3.



Момент на сила спрямо ос

На твърдо тяло, което се върти около неподвижна ос z , действа сила $\mathbf{F}$. Моментът на силата $\mathbf{M}$ се определя спрямо произволна точка O от оста z . Ще покажем, че проекцията M_z на момента на силата върху оста z не зависи от положението на началото O . Доказателството ще направим за частния случай, когато силата $\mathbf{F}$ лежи в равнина, перпендикулярна на оста z . Да разложим ра-



Фиг.15-4.

диус-вектора $\mathbf{r}$ на приложната точка на силата на две компоненти: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$. Векторът $\mathbf{r}_{\parallel}$ е успореден на оста z , а $\mathbf{r}_{\perp}$ – перпендикулярен на оста z (фиг. 15-4). Моментът на силата спрямо точка O е

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{M}_{\parallel}.$$

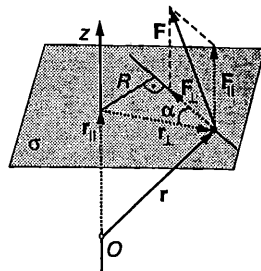
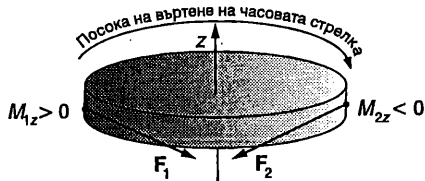
Векторът $\mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}$ е перпендикулярен на оста z (неговата проекция върху оста z е нула). Векторът $\mathbf{M}_{\parallel} = \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{F}$ е успореден на оста z . Абсолютната стойност на проекцията M_z на вектора $\mathbf{M}$ върху оста на въртене z е равна на модула на вектора $\mathbf{M}_{\parallel}$. От чертежа на фиг.15-4 се вижда, че

$$(15.13) \quad |M_z| = M_{\parallel} = r_{\perp} F \sin \alpha = FR,$$

където $R = r_{\perp} \sin \alpha$ е рамото на силата – разстоянието от линията на действие на силата до оста на въртене z .

И така, големината на проекцията на момента на силата върху оста z е равна на произведението от големината на силата F и нейното рамо R и не зависи от положението на началото O върху оста z . Затова M_z може да се разглежда като самостоятелна величина, наречена *момент на силата (въртящ момент) спрямо оста z* . Моментът на сила спрямо ос е скаларна величина, която може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Въртящият момент е положителен ($M_z > 0$), когато векторът $\mathbf{M}_{\parallel}$ е насочен в по-

Фиг.15-5.



Фиг.15-6.

ложителната посока на оста z (фиг.15-4). Тогава силата $\mathbf{F}$ се стреми да завърти тялото в посока, обратна на посоката на въртене на часовата стрелка (фиг.15-5). Силите, които завъртат тялото по посока на часовата стрелка (фиг.15-5), имат отрицателен въртящ момент ($M_z < 0$).

Ако силата $\mathbf{F}$ не лежи в перпендикулярна на оста z равнина σ , тя може да се разложи на две компоненти: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$. Компонентата $\mathbf{F}_{\parallel}$ е успоредна на оста на въртене z , а нейният момент $\mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\parallel}$ е перпендикулярен на оста z (фиг.15-6), поради което проекцията му върху оста z е нула. Затова моментът на силата $\mathbf{F}$ спрямо оста z е равен на момента на компонентата $\mathbf{F}_{\perp}$, която лежи в равнина, перпендикулярна на оста z . Големината му се определя по формула (15.13)

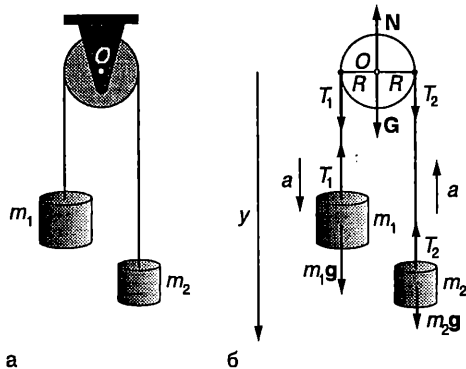
$$(15.14) \quad |M_z| = r_{\perp} F_{\perp} \sin \alpha = F_{\perp} R,$$

където $F_{\perp}$ и R са модулът и рамото на компонентата $\mathbf{F}_{\perp}$ (фиг.15-6).

От уравнения (15.13) и (15.14) се вижда, че ако се премества приложната точка на силата в направление на нейната линия на действие, моментът на силата (въртящият момент) спрямо оста z не се изменя.

Пример 15.1. Атвудова машина. През макара с радиус R , която може да се върти без триене около хоризонтална ос O , е прехвърлена неразтеглива нишка. На двата края на нишката са завързани теглилки с маси m_1 и m_2 (фиг.15-7а). Определете големината на ускорението a на теглилките. Инерционният момент на макаратата спрямо оста на въртене е I . Нишката не се хлъзга по макаратата. Масата на нишката и съпротивлението на въздуха се пренебрегват.

Решение. Ще разглеждаме макаратата и допиращата се до нея част от нишката като едно



Фиг. 15-7.

тяло, на което действат силата на тежестта G , нормалната реакция на опората (оста O) N и вертикални сили на опъване от страна на останалите части от нишката. На фиг. 15-7б големините на силите на опъване са означени с T_1 и T_2 . Рамото на силите G и N спрямо оста на въртене O е нула, поради което те не създават въртящи моменти. Силите на опъване имат еднакво рамо R , равно на радиуса на макарата. Въртящите им моменти са с противоположни знаци (силата T_2 върти макарата по посока на часовата стрелка, а T_1 – в противоположната посока). Уравнението за въртене на твърдо тяло около неподвижна ос (15.12) добива вида

$$I\varepsilon = T_1 R - T_2 R.$$

Между ъгловото ускорение ε на макарата и ускорението a на теглилките има кинематична връзка. Тъй като нишката е неразтеглива, теглилките се движат в противоположни посоки, като за равни интервали от време изминават еднакви разстояния. Това означава, че техните скорости и ускорения са равни по големина и противоположни по посока. Тангенциалното ускорение на всички точки от нишката също е a . Точките от периферията на макарата се движат заедно с нишката (нишката не се хлъзга) със същото тангенциално ускорение a . Следователно ъгловото ускорение на макарата ε и ускорението a на нишката (телата) са свързани със съотношение (3.7) от стр. 25

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Нишката действа на теглилките със същите по големина сили на опъване T_1 и T_2 (фиг. 15-7б). Действително, да допуснем, че лявата част от нишката действа на макарата и на теглилката с маса m_1 с различни по големина сили. Тогава съгласно с третия принцип на механиката резултантната сила F , с която макарата и

тегилката действат на нишката, ще бъде различна от нула – нишката, чиято маса сме приели за нула, би се движела с безкрайно голямо ускорение.

Записваме уравнението за движение на двете теглилки по вертикалната ос y

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \text{ и } m_2 g - T_2 = -m_2 a,$$

където сме приели, че тегилката с маса m_1 се спуска надолу.

От получената система от две уравнения определяме ускорението

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2) \left(1 + \frac{I}{R^2(m_1 + m_2)} \right)} g.$$

Когато макарата е много лека, т.е. когато нейният инерчен момент е много по-малък от инерчните моменти на двете теглилки спрямо оста на въртене ($I \ll R^2(m_1 + m_2)$), за ускорението на теглилките се получава

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g.$$

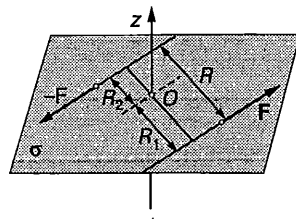
Двойка сили

Две равни по големина и противоположни по посока сили, които лежат в една и съща равнина σ , образуват *двойка сили*. Ще определим въртящия момент на двойка сили спрямо ос, перпендикулярна на равнината σ (фиг. 15-8). Двете сили въртят в една и съща посока, поради което моментите им имат еднакви знаци. Общият въртящ момент на двойката е

$$(15.15) \quad M_z = FR_1 + FR_2 = FR,$$

където $R_1 + R_2 = R$ е разстоянието между линиите на действие на двете сили. Полученият резултат не зависи от положението на точката O , в която оста на въртене z пресича равнината σ . Затова можем да

Фиг. 15-8.



говорим за въртящ момент M на двойка сили, без да уточняваме положението на оста на въртене – големината и знака на M спрямо всички оси, перпендикулярни на равнината σ , са еднакви.

Задачи

1. Часовата и минутната стрелка на часовника Big Ben в Лондон са дълги съответно 2,7 m и 4,5 m и имат маси 60 kg и 100 kg. Определете моментите на силите на тежестта на двете стрелки спрямо оста на часовника, когато той показва: а) 6:00; б) 9:00; в) 9:05; г) 11:05.

Приемете, че приложената точка на силата на тежестта е по средата на стрелките.

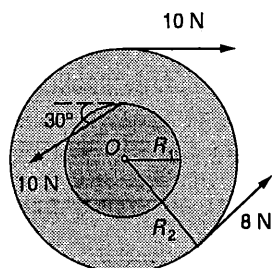
2. Велосипедно колело може да се върти около неподвижна ос z . Пресметнете въртящия момент на приложената към колелото сила, ако то се върти с ъглово ускорение $\epsilon = 10 \text{ rad/s}^2$. Инерционният момент на колелото спрямо оста z е $I_z = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

3. Барабанът на автоматична пералня започва да се върти около неподвижната си ос z под действие на постоянен въртящ момент $M_z = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ и след 3 s достига ъглова скорост $\omega = 60 \text{ rad/s}$. Определете инерционния момент I_z на барабана. Триенето се пренебрегва.

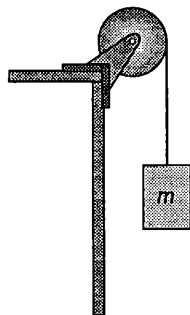
4. Роторът на електромотор с инерчен момент I се върти около неподвижна ос. Ъгълът на завъртане на дадена точка от ротора се изменя с течение на времето t по закона $\theta = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$, където c_1 , c_2 и c_3 са константи. Определете как се изменя с течение на времето въртящият момент на приложената към ротора сила.

5. Макара с инерчен момент $I = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ се върти без триене около ос z , минаваща през точка O и перпендикулярна на равнината на чертежа от фиг.15-9. Вътрешният и външният

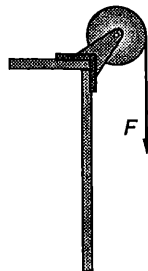
Фиг.15-9.



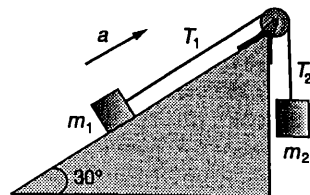
Фиг.15-10.



Фиг.15-11.



Фиг.15-12.



радиуси на макарата са: $R_1 = 10 \text{ cm}$ и $R_2 = 20 \text{ cm}$. Определете: а) резултантния въртящ момент M_z на всички сили, приложени към макарата; б) ъгловото ускорение ϵ на макарата.

6. Върху макара с радиус $R = 6 \text{ cm}$ и инерчен момент $I = 0,02 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ е навита неразтеглива нишка, към която е закачена теглилка с маса $m = 2 \text{ kg}$ (фиг.15-10). Определете ускорението a на теглилката и силата на опъване на нишката T . Нишката не се хлъзга по макарата. Масата на нишката се пренебрегва.

7. Върху макара с радиус $R = 6 \text{ cm}$ и инерчен момент $I = 0,02 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ е навита неразтеглива нишка. В началния момент $t = 0$ макарата е в покой, след което нишката започва да се тегли със сила (фиг.15-11), чиято големина се изменя по закона $F = c_1 t + c_2 t^2$, където $c_1 = 0,2 \text{ N/s}$ и $c_2 = 0,1 \text{ N/s}^2$. Определете ъгловото ускорение ϵ и ъгловата скорост ω на макарата 2 s след началото на движението (в момент $t = 2 \text{ s}$).

8. Върху макара с радиус R е навита неразтеглива нишка, към която е закачена теглилка с маса m (фиг.15-10). Ако нямаше триене в оста на макарата, теглилката щеше да се движи с ускорение $a = g/4$ (g е земното ускорение). Поради триенето обаче ускорението на макарата е $a_1 = g/5$. По тези данни определете: а) инерционния момент I на макарата; б) големината на въртящия момент на силата на триене M_f . Нишката не се хлъзга по макарата. Масата на нишката се пренебрегва.

9. Двете трупчета с маси $m_1 = 1,5 \text{ kg}$ и $m_2 = 2 \text{ kg}$, показани на фиг.15-12, са свързани с безтегловна неразтеглива нишка, прехвърлена през макара с радиус $R = 0,1 \text{ m}$. Определете инерционния момент I на макарата и силите на опъване T_1 и T_2 на двете части от нишката, ако трупчето с маса m_1 се изкачва по наклонената равнина с ускорение $a = 2 \text{ m/s}^2$. Триенето между трупчето и наклонената равнина се пренебрегва. Нишката не се хлъзга по макарата.

16. Инерчен момент

При въртенето на твърдо тяло инерчният момент спрямо ос е важна динамична характеристика. Той играе същата роля, както масата при постъпателното движение: *инерчният момент е мярка за инертността на телата при въртливо движение.*

В общия случай на нееднородно тяло с неправилна форма определянето на инерчните му моменти спрямо зададени оси на въртене е сложна задача, която се решава експериментално или с помощта на числени методи. За редица симетрични еднородни тела обаче инерчните моменти спрямо техните оси на симетрия могат лесно да се пресметнат аналитично. Преди да направим подобни пресмятания ще се спрем на две полезни съотношения, известни като теореми за успоредните и за перпендикулярните оси.

Теорема за успоредните оси (теорема на Щайнер)

Теорема. *Инерчният момент I на твърдо тяло спрямо произволна ос на въртене е равен на сумата от инерчния момент на тялото спрямо ос, успоредна на дадената и преминаваща през неговия център на масите C , и произведението на масата m на тялото по квадрата на разстоянието d между двете оси*

$$(16.1) \quad I = I_C + md^2.$$

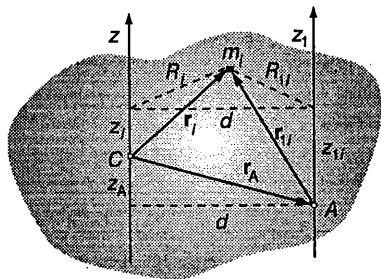
Доказателство. Нека C е центърът на масите на твърдо тяло, а A е произволна точка, която може да се намира и извън тялото. z и z_1 са две успоредни оси, които преминават през точките C и A (фиг.16-1). Радиус-векторите $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_{1i}$ на произволен малък елемент (материална точка) с маса m_i от твърдото тяло спрямо точките C и A са свързани със съотношението (фиг.16-1)

$$\mathbf{r}_{1i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A,$$

където $\mathbf{r}_A$ е радиус-векторът на точка A спрямо началото C . Повдигаме двете страни на това векторно равенство на квадрат:

$$(16.2) \quad r_{1i}^2 = r_i^2 + r_A^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_A.$$

Да означим с z_{1i} , z_i и z_A проекциите на



Фиг.16-1.

радиус-векторите $\mathbf{r}_{1i}$, $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_A$ върху двете оси, а с R_{1i} и R_i – разстоянията от разглеждания елемент с маса m_i до двете оси (отсечката R_{1i} е перпендикулярна на оста z_1 , а R_i е перпендикулярна на оста z). От Питагоровата теорема следва, че (фиг.16-1):

$$r_{1i}^2 = R_{1i}^2 + z_i^2; \quad r_i^2 = R_i^2 + z_i^2,$$

От фиг.16-1 се вижда, че $z_{1i} = z_i - z_A$ (отчетено е, че в случая $z_A < 0$) и $r_A^2 = z_A^2 + d^2$, където d е разстоянието между двете оси. След заместване на квадратите на трите радиус-вектора в (16.2) и елементарни преобразования се получава

$$(16.3) \quad R_{1i}^2 = R_i^2 + d^2 + 2z_A z_i - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_i.$$

Умножаваме двете страни на уравнение (16.3) по масата m_i на малкия елемент и сумираме всички аналогични равенства, които могат да се запишат за всички малки елементи, на които мислено сме разделили твърдото тяло. Получаваме

$$(16.4) \quad \sum m_i R_{1i}^2 = \sum m_i R_i^2 + d^2 \sum m_i + 2z_A \sum m_i z_i - 2\mathbf{r}_A \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i.$$

По определение $\sum m_i z_i = m z_C$, където

$m = \sum m_i$ е масата на твърдото тяло, а z_C е проекцията на радиус-вектора $\mathbf{r}_C$ на центъра на масите върху оста z . Също така $\sum m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$. Тъй като началото C съвпада с центъра на масите на твърдото тяло, то $\mathbf{r}_C = 0$ и $z_C = 0$. Следователно последните два члена в уравнение (16.4) също са равни на нула. Тогава уравнение (16.4) добива вида

$$(16.5) \quad I = I_C + md^2,$$

където $I = \sum m_i R_{iz}^2$ е инерчният момент на

тялото спрямо оста z_1 , а $I_C = \sum m_i R_i^2$ е инерчният момент спрямо оста z , която е успоредна на z_1 и преминава през центъра на масите C на твърдото тяло. С това теоремата на Щайнер е доказана.

Теорема за перпендикулярните оси

Теорема. Сумата от инерчните моменти на твърдо тяло спрямо три взаимно перпендикулярни оси, пресичащи се в една точка O , е равна на удвоената сума от произведенията на масите m_i на материалните точки, от които се състои тялото, по квадрата на техните разстояния r_i до точка O

$$(16.6) \quad I_x + I_y + I_z = 2 \sum m_i r_i^2.$$

Доказателство. Избираме трите оси за координатни оси на правоъгълна декартова координатна система. Разглеждаме произволна материална точка от тялото с маса m_i и радиус-вектор $\mathbf{r}_i$. Записваме квадратите на разстоянията от точката до координатните оси (фиг.16-2)

$$R_{ix}^2 = y_i^2 + z_i^2; R_{iy}^2 = z_i^2 + x_i^2; R_{iz}^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

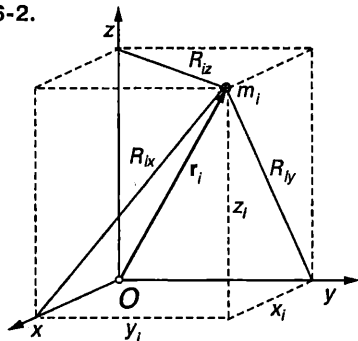
Събираме трите равенства

$$R_{ix}^2 + R_{iy}^2 + R_{iz}^2 = 2(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2r_i^2,$$

умножаваме двете страни на полученото равенство по масата m_i на материалната точка и сумираме аналогичните равенства за всички материални точки, от които е изградено твърдото тяло. Получаваме

$$\sum m_i R_{ix}^2 + \sum m_i R_{iy}^2 + \sum m_i R_{iz}^2 = I_x + I_y + I_z = 2 \sum m_i r_i^2,$$

Фиг.16-2.

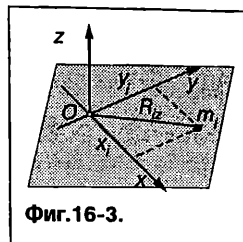


където

$$I_x = \sum m_i R_{ix}^2; I_y = \sum m_i R_{iy}^2; I_z = \sum m_i R_{iz}^2$$

са инерчните моменти на тялото съответно спрямо осите x , y и z . С това теоремата за перпендикулярните оси е доказана.

Специален интерес представлява частният случай на плоско тяло, т.е. тяло, чиято маса е разпределена в една равнина (например тънка пластинка). Можем да изберем осите x и



Фиг.16-3.

уда лежат в равнината на тялото (фиг. 16-3). Тогава за всички точки от тялото $z = 0$ и

$$(16.7) \quad \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i R_{iz}^2 = I_z.$$

От уравнения (16.6) и (16.7) получаваме

$$(16.8) \quad I_x + I_y = I_z.$$

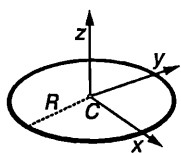
Уравнение (16.8) изразява теоремата за перпендикулярните оси, приложена към плоско тяло: сумата от инерчните моменти на плоско тяло спрямо две взаимно перпендикулярни оси, лежащи в равнината на тялото, е равна на инерчния момент спрямо ос, перпендикулярна на тялото, при условие, че трите оси се пресичат в една точка.

Сега ще преминем към пресмятане на инерчните моменти на някои симетрични тела.

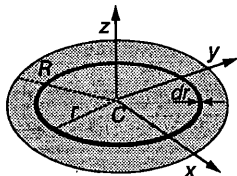
Инерчен момент на тънък пръстен

Най-напред ще пресметнем инерчния момент на тънък еднороден пръстен с маса m и радиус R спрямо три взаимно перпендикулярни оси, минаващи през центъра на масите му C . Оста z , която е перпендикулярна на равнината на пръстена, е ос на аксиална (ротационна) симетрия – при завъртане на пръстена около оста z на произволен ъгъл ϕ пръстенът съвпада сам със себе си. Другите две оси x и y лежат в равнината на пръстена (фиг.16-4). Тъй като всички точки от пръстена са на еднакво разстояние от оста z , инерчният му момент спрямо нея е

$$(16.9) \quad I_z = mR^2.$$



Фиг. 16-4.



Фиг. 16-5.

От симетрията следва, че за едномерен пръстен инерчните моменти спрямо осите x и y са равни: $I_x = I_y$. Прилагаме теоремата за перпендикулярните оси (16.8) и определяме

$$(16.10) \quad I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Инерчен момент на диск

Ще направим аналогични пресмятания за тънък диск с маса m и радиус R . За разлика от пръстена, отделните малки елементи (материални точки), от които е съставен дискът, се намират на различни разстояния от оста на симетрия z . Затова ще разделим мислено диска на голям брой тънки пръстени. На фиг. 16-5 е показан един от тях. Масата на пръстена е

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr,$$

където $m/\pi R^2$ е масата на единица площ от диска, а $2\pi r dr$ – площта на разглеждания пръстен. Съгласно с уравнение (16.9) инерчният момент на пръстена е

$$dI_z = r^2 dm = \frac{2m}{R^2} r^3 dr.$$

Инерчният момент на диска е сума от инерчните моменти на всички пръстени

$$(16.11) \quad I_z = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2.$$

Поради симетрията, инерчните моменти спрямо осите x и y са равни. Пренебрегваме дебелината на диска и го разглеждаме като тяло, чиято маса е разпределена в една равнина. Тогава от теоремата за перпендикулярните оси (16.8) следва, че

$$(16.12) \quad I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} m R^2.$$

Пример 16.1. Пресметнете инерчният момент на едномерен цилиндър с маса m , радиус R и дължина L спрямо три взаимно перпендикулярни оси, минаващи през неговия център на масите (фиг. 16-6а).

Решение. Разпределението на масата на цилиндъра спрямо оста z е същото, както при диск. Затова инерчният момент I_z се изразява с формула (16.11): $I_z = m R^2/2$. От симетрията следва, че инерчните моменти спрямо перпендикулярните оси x и y са еднакви: $I_x = I_y$. За да пресметнем I_x , разделяме мислено цилиндъра на голям брой тънки дискове. На фиг. 16-6б

е показан един от тях. Масата му е $dm = \frac{m}{L} dz$.

Инерчният му момент спрямо оста x определяме с помощта на теоремата на Шайнер

$$dI_x = \frac{1}{4} R^2 dm + z^2 dm,$$

където първият член е равен на инерчния момент на диска спрямо ос, успоредна на оста x , която минава през центъра на масите на диска. Разстоянието между двете оси е z (фиг. 16-6б). След заместване на dm се получава

$$dI_x = \left(\frac{1}{4} R^2 + z^2 \right) \frac{m}{L} dz.$$

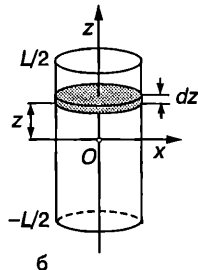
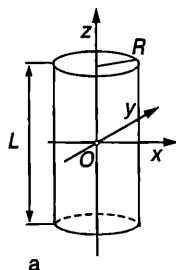
Инерчният момент на цилиндъра е сума (интеграл) от инерчните моменти на отделните пръстени

$$(16.13) \quad I_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{1}{4} R^2 + z^2 \right) \frac{m}{L} dz = m \left(\frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} R^2 \right).$$

В частния случай на дълга цилиндрична пръчка, за която $L \gg R$, вторият член в дясната страна на равенство (16.13) може да се пренебрегне и за инерчния момент на пръчката се получава

$$(16.14) \quad I_x = \frac{1}{12} m L^2.$$

Фиг. 16-6.



Инерчен момент на тънка сферична обвивка

Ще определим инерчните моменти на тънка однородна сферична обвивка с маса m и радиус R спрямо три взаимно перпендикулярни оси x , y и z , минаващи през центъра на сферата. Ще използваме теоремата за перпендикулярните оси (16.6). Всички малки елементи (материални точки), от които можем да смятаме че е съставена сферата, се намират на еднакви разстояния R от нейния център. Затова

$$\sum m_i r_i^2 = R^2 \sum m_i = R^2 m$$

и уравнение (16.6) добива вида

$$I_x + I_y + I_z = 2mR^2.$$

От сферичната симетрия следва, че трите инерчни момента са равни. Следователно

$$(16.15) \quad I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} mR^2.$$

Инерчен радиус

Често за характеризиране на динамичните свойства на телата при въртене около неподвижна ос z се използва величината инерчен радиус. Инерчният радиус ρ_z на твърдо тяло спрямо дадена ос на въртене z има размерност на дължина и се въвежда чрез равенството

$$(16.16) \quad I_z = m\rho_z^2,$$

където m е масата на тялото, а I_z е инерчният му момент спрямо оста z .

Задачи

1. Пресметнете инерчния момент на ротор с маса $m = 5 \text{ kg}$ и инерчен радиус $\rho_z = 6 \text{ cm}$.
2. Определете инерчния момент на: а) однороден диск с маса m и радиус R спрямо ос, перпендикулярна на равнината на диска, минаваща през точка от периферията му; б) тънка однородна цилиндрична пръчка с маса m и дължина L спрямо ос, перпендикулярна на пръчката, минаваща през единия ѝ край; в) тънка однородна сферична обвивка с маса m и радиус R спрямо ос, която се допира до повърхността на обвивката.

Указание. Използвайте теоремата на Щайнер.

3. Докажете, че инерчният момент на плътно однородно кълбо с маса m и радиус R спрямо ос, минаваща през центъра на кълбото, се из-

разява с формулата $I = \frac{2}{5} mR^2$.

Указание. Разделете кълбото на тънки сферични слоеве. Определете инерчния момент на слой с радиус r и дебелина dr и интегрирайте в граници от $r = 0$ до $r = R$.

4. Докажете, че инерчният момент спрямо централната ос на кух цилиндър, направен от однородно вещество, е $I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$, където m

е масата на цилиндъра, R_1 е вътрешният му радиус, а R_2 е външният му радиус (фиг.16-7).

Указание. Използвайте същия подход, както при определянето на инерчния момент на однороден диск: разделете цилиндъра на тънки цилиндрични слоеве, определете инерчния момент dI на слой с радиус r и дебелина dr и интегрирайте в граници от $r = R_1$ до $r = R_2$.

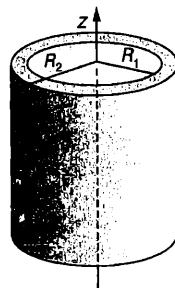
5. Определете инерчните моменти I_x , I_y и I_z на тънка однородна правоъгълна пластинка с маса m , дължина a и ширина b (фиг.16-8). Осите x , y и z са взаимно перпендикулярни и се пресичат в центъра на масите C на пластинката. Оста z е перпендикулярна на пластинката.

Указание. Използвайте формулата за инерчен момент на тънка пръчка (16.14), за да определите I_x и I_y . (Ако например мислено сплескаме пластинката в направление на оста y , тя се превръща в тънка пръчка с дължина a , която има същия инерчен момент I_y , както пластинката.) След това приложете теоремата за перпендикулярните оси.

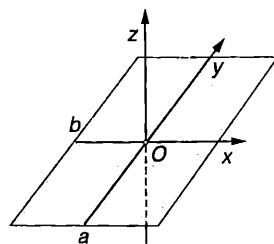
6. Пресметнете инерчния момент на тънка однородна квадратна пластинка с маса m и страна a спрямо диагонала на квадрата.

Указание. Двата диагонала на квадрата са взаимно перпендикулярни. Използвайте резултата от зад.5 и теоремата за перпендикулярните оси.

Фиг.16-7.



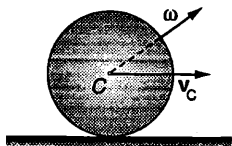
Фиг.16-8.



17. Плоскопаралелно движение на твърдо тяло. Кинетична енергия

Плоскопаралелно движение

Плоскопаралелно се нарича такова движение на твърдо тяло, при което всички негови точки се преместват успоредно на дадена неподвижна равнина. При плоскопаралелно движение: 1. ъгловата скорост ω на тялото не променя направлението си (може само да изменя големината си и да сменя посоката си на противоположната); 2. скоростта на центъра на масите $\mathbf{v}_C$ винаги е перпендикулярна на ω . Действително, ако горните две условия са изпълнени, скоростта $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r}$ (вж. уравнение (15.1) на стр.89) на произволна точка от тялото през цялото време лежи в една и съща равнина, която е перпендикулярна на ω . Следователно всички точки от тялото се движат в успоредни равнини – тялото извършва плоскопаралелно движение. Пример за плоскопаралелно движение е търкалянето на обръч, диск, цилиндър или кълбо (фиг.17-1): при търкалянето всички точки от тялото се движат в равнини, успо-



Фиг.17-1. Плоскопаралелно движение.

редни на равнината на чертежа. Във всеки момент от времето плоскопаралелното движение може да се разглежда като чисто въртене около неподвижна моментна ос (вж. Пример 17.1). Положението на тази ос спрямо тялото в общия случай се изменя по време на движението.

Уравнението за моментите при плоскопаралелно движение има простия вид $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$, ако моментът на импулса $\mathbf{L}$ и резултантният момент $\mathbf{M}$ на външните сили са определени: 1. спрямо неподвижна точка O ($\mathbf{v}_O = 0$); 2. спрямо точка O , която съвпада с центъра на масите C на тя-

лото ($\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C$). Тогава проекцията на уравнението за моментите върху ос, успоредна на вектора на ъгловата скорост ω , която минава през точка O (или C), е

$$(17.1) \quad I_O \frac{d\omega}{dt} = M_O \quad \text{или} \quad I_C \frac{d\omega}{dt} = M_C,$$

където M_O и M_C са въртящите моменти спрямо тези оси. Връзката между инерчните моменти I_O и I_C спрямо двете успоредни оси се изразява от теоремата на Щайнер (уравнение (16.5) на стр.94).

Използването на уравнението на динамиката в общия му вид (уравнение (14.16) на стр.86) и записването на проекцията му върху движеща се моментна ос на въртене, която не преминава през центъра на масите, в повечето случаи е неудобно и води до сложни за решаване уравнения.

***Пример 17.1.** Докажете, че ако в даден момент абсолютната скорост $\mathbf{v}_A$ на някоя точка A от твърдо тяло е перпендикулярна на неговата ъглова скорост ω , движението на тялото може да се разглежда като въртене около неподвижна ос.

Решение. Избираме началото на неинерциалната отправна система, свързана с твърдото тяло, в точка A . Ще докажем, че точка O с ра-

диус-вектор $\mathbf{r}_O = \frac{\omega \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}$ е неподвижна (точката O може да се намира извън тялото). Абсолютната скорост на точка O е

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_O = \mathbf{v}_A + \omega \times \frac{\omega \times \mathbf{v}_A}{\omega^2} =$$

$$= \mathbf{v}_A + \omega \frac{\omega \cdot \mathbf{v}_A}{\omega^2} - \mathbf{v}_A \frac{\omega \cdot \omega}{\omega^2} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_A = 0,$$

където сме използвали формула A95 (вж. стр. 236) за тройно векторно произведение и сме отчели, че векторите $\mathbf{v}_A$ и ω са взаимно перпендикулярни, т.е. $\omega \cdot \mathbf{v}_A = 0$.

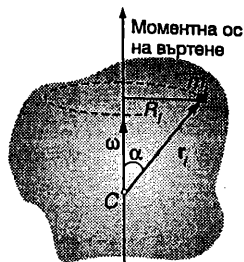
Следователно точка O е неподвижна и в дадения момент от времето тялото извършва въртене около неподвижна ос, която преминава през точка O и е успоредна на вектора на ъгловата скорост ω . Тъй като в частния случай на плоскопаралелно движение скоростите на всички точки от тялото са перпендикулярни на

вектора на ъгловата скорост ω , плоскопаралелното движение може да се разглежда като последователни завъртания около различни неподвижни оси.

Пример 17.2. Диск с радиус R се търкаля по хоризонтална равнина. Центърът на масите C на диска се движи със скорост v_C , а ъгловата скорост на въртене е ω (фиг.17-1). Да се определи положението на неподвижната моментна ос на въртене в следните случаи:

- а) $v_C = \omega R/2$; б) $v_C = \omega R$; в) $v_C = 2\omega R$.

Решение. Неподвижната точка O (вж. Пример 17.1) лежи на вертикалната линия, прекарана през центъра на диска и се намира на разстояние $r = v_C/\omega$ под него: а) $r_1 = R/2$; б) $r_2 = R$; в) $r_3 = 2R$. Съответната неподвижна моментна ос на въртене е перпендикулярна на равнината на чертежа от фиг.17-1. *



Фиг.17-2.

Във втория член на уравнението за E_k , който съдържа смесено векторно-скаларно произведение, сменяме местата на знаците за двете произведения (вж. формула А94 на стр.236) и извършваме сумиране по всички малки елементи. Кинетичната енергия на твърдото тяло е

$$E_k = \sum \frac{m_i v_C^2}{2} + (v_C \times \omega) \sum m_i r_i + \omega^2 \sum \frac{m_i R_i^2}{2}.$$

Тъй като началото C , от което се измерват радиус-векторите r_i на отделните елементи, е избрано в центъра на масите на твърдото тяло, от определението за център на масите следва, че $\sum m_i r_i = 0$. Следователно

$$(17.2) \quad E_k = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{\omega^2 I_C}{2},$$

където $m = \sum m_i$ е масата на тялото, а

$I_C = \sum m_i R_i^2$ е инерчният му момент спрямо моментна ос на въртене, преминаваща през центъра на масите C .

И така, кинетичната енергия на твърдо тяло може да се представи като сума от два члена. Първият член $m v_C^2/2$ има същия вид, както при постъпателно движение на тялото със скорост, равна на скоростта v_C на центъра на масите. Затова се нарича *енергия на постъпателно движение* на тялото. Вторият член $\omega^2 I_C/2$ изразява *кинетичната енергия на въртене* с ъглова скорост ω около моментна ос, минаваща през центъра на масите C на тялото. По този начин всяко движение на твърдо тяло се представя като суперпозиция от две независими движения: постъпателно движение със скорост v_C и въртене около момент-

Кинетична енергия

Нека началото на неинерциалната отправна система съвпада с центъра на масите C на твърдото тяло. За да определим кинетичната енергия на тялото спрямо инерциална отправна система, мислено ще го разделим на много голям брой малки елементи, които ще разглеждаме като материални точки. В даден момент от времето елемент с маса m_i има радиус-вектор r_i . Абсолютната му скорост се определя от уравнение (15.1): $v_i = v_C + \omega \times r_i$.

Кинетичната енергия на елемента е

$$\begin{aligned} E_{ki} &= \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i (v_C + \omega \times r_i)^2}{2} = \\ &= \frac{m_i v_C^2}{2} + m_i v_C \cdot (\omega \times r_i) + \frac{m_i (\omega \times r_i)^2}{2}. \end{aligned}$$

Последният член от горното равенство записваме във вида

$$\begin{aligned} \frac{m_i (\omega \times r_i)^2}{2} &= \frac{m_i |\omega \times r_i|^2}{2} = \\ &= \frac{m_i (\omega r_i \sin \alpha)^2}{2} = \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2}, \end{aligned}$$

където $R_i = r_i \sin \alpha$ е разстоянието от елемента до моментната ос на въртене (фиг.17-2).

на ос, минаваща през центъра на масите. При плоскопаралелно движение $I_C = \text{const}$, защото съгласно с определението за плоскопаралелно движение оста, спрямо която се пресмята I_C , не променя направиението си по време на движението. В общия случай на движение на твърдо тяло ъгловата скорост ω променя посоката си с течение на времето, поради което се изменя и направиението на оста, спрямо която се пресмята инерционият момент I_C , т.е. I_C е функция на времето. Тогава формула (17.2) не е удобна за пресмятане на кинетичната енергия.

Както беше вече отбелязано, плоскопаралелното движение на твърдо тяло може да се разглежда като въртене около неподвижна ос. Ако се избере началото O на неинерциалната отправна система да лежи върху неподвижната ос ($v_O = 0$), за кинетичната енергия се получава

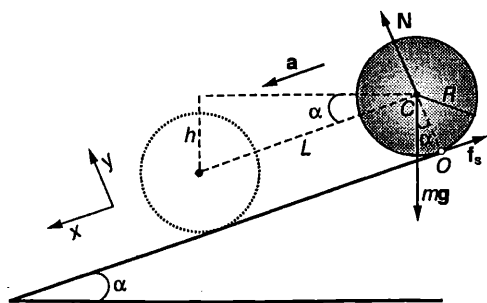
$$(17.3) E_k = \sum \frac{m_i(\omega \times r_i)^2}{2} = \omega^2 \sum \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{\omega^2 I_O}{2}.$$

където $I_O = \sum m_i r_i^2$ е инерционият момент на тялото спрямо неподвижната моментна ос на въртене. В редица случаи инерционият момент I_O се пресмята лесно с помощта на теоремата на Щайнер (вж. пример 17.3).

Пример 17.3. Тънка еднородна метална сфера с маса m и радиус R се търкаля без хлъзгане по наклонена равнина, която сключва ъгъл α с хоризонта. Определете ускорението на центъра на сферата.

Решение. Вариант 1. Сферата извършва плоскопаралелно движение – през цялото време на движението векторът на ъгловата скорост ω е насочен перпендикулярно на равнината на чертежа от фиг.17-3, а траекториите на всички точки от сферата лежат в успоредни равнини (успоредни на равнината на чертежа). На сферата действат три сили: сила на тежестта mg , сила на нормална реакция на опората N и сила на триене f_s (фиг.17-3). Търкалянето е без хлъзгане, което означава, че точка O от сферата, която в даден момент се допира до равнината, е в покой спрямо равнината. Следователно оста, която е успоредна на ω и минава през точка O , е неподвижна моментна ос на въртене. Уравнението за моментите спрямо тази ос е

$$I_O \epsilon = mgR \sin \alpha,$$



Фиг.17-3.

където $R \sin \alpha$ е рамото на силата на тежестта. Ще отбележим, че силата на триене f_s и силата на нормална реакция N не създават въртящи моменти спрямо оста O , тъй като техните рамена са нула. Между ъгловото ускорение ϵ на сферата и ускорението a на нейния център C при търкаляне без хлъзгане съществува кинематична връзка $\epsilon = a/R$. Инерционият момент на сферата спрямо оста O определяме с помощта на теоремата на Щайнер

$$I_O = I_C + md^2.$$

Заместваме $I_C = \frac{2}{3} mR^2$ (вж. уравнение (16.15) на стр.97)) и $d = R$ и получаваме

$$I_O = \frac{5}{3} mR^2.$$

Заместваме I_O и ϵ в уравнението за моментите и определяме ускорението a

$$a = \frac{3}{5} g \sin \alpha.$$

Вариант 2. Задачата може да се реши също така, ако се запише уравнението за моментите спрямо движеща се ос, която минава през центъра на масите C и е успоредна на вектора на ъгловата скорост ω . Единствено силата на триене създава въртящ момент спрямо оста C . Уравнението за моментите спрямо оста C е

$$I_C \epsilon = f_s R \quad \text{или} \quad \left(\frac{2}{3} mR^2 \right) \frac{a}{R} = f_s R.$$

Тъй като силата на триене f_s (сила на триене при покой) е неизвестна, трябва да запишем и уравнението за движението на центъра на масите на сферата. Проекцията на това уравнение върху оста x (фиг.17-3) е

$$mg \sin \alpha - f_s = ma.$$

От двете уравнения – за въртеливито и за постъпателното движение на сферата, изключваме неизвестната сила на триене и получа-

ваме същия резултат за ускорението a , както във Вариант 1.

Вариант 3. Задачата може да се реши и енергетично. Тъй като силите на триене при покой не извършват работа, механичната енергия на сферата не се изменя. Нека в началния момент сферата е в покой. След като се спусне на разстояние h по вертикалата, изменението на потенциалната енергия е равно на кинетичната енергия

$$mgh = \frac{I_0 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} mR^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2,$$

където сме отчели, че при търкаляне без хлъзгане ъгловата скорост и скоростта на центъра на масите са свързани със съотношението $\omega = v/R$. Заместваме $h = L \sin \alpha$, където L е изминатият от точка C път върху наклонената равнина (фиг.17-3), и съкращаваме на m . Получаваме

$$gL \sin \alpha = \frac{5}{6} v^2.$$

Диференцираме двете страни на полученото уравнение по времето t

$$g \sin \alpha \frac{dL}{dt} = \frac{5}{6} 2v \frac{dv}{dt}.$$

След като отчетем, че $dL/dt = v$ и $dv/dt = a$, от горното уравнение получаваме същия резултат за ускорението a , както по първите два метода.

Аналогия между величините, описващи постъпателното и въртелимото движение

В таблица 17.1 са съпоставени основните величини и закономерности при постъпателното и въртелимото движение на твърдо тяло. Постъпателното движение на твърдо тяло се описва по същия начин, както движението на материална точка (например движението на центъра на масите на тялото). От таблицата може да се направи изводът, че: 1. моментът на силата при въртелимото движение е аналог на силата при постъпателното движение; 2. моментът на импулса е аналог на импулса; 3. инерчният момент е аналог на масата. Следователно *инерчният момент е мярка за инертността на телата при въртелимото движение*. Всички ъглови кинематични величини – ъгъл на завъртане, ъглова скорост и ъглово ускорение са свързани с

динамичните (ъглови) величини: инерчен момент, момент на сила и момент на импулса чрез зависимости, които са подобни на зависимостите между съответните кинематични и динамични характеристики на постъпателното движение (път, скорост и ускорение, от една страна, и маса, сила и импулс от друга страна).

Таблица 17.1. Аналогия между величините, описващи постъпателното и въртелимото движение на твърдо тяло.

Постъпателно движение	Въртеливо движение
s – път	θ – ъгъл на завъртане
v – скорост	ω – ъглова скорост
$v = ds/dt$	$\omega = d\theta/dt$
a – ускорение	ε – ъглово ускорение
$a = dv/dt$	$\varepsilon = d\omega/dt$
m – маса	I_z – инерчен момент
F – сила	M – момент на сила
p – импулс	L – момент на импулса
$p_x = mv_x$ – проекция на импулса върху ос	$L_z = I_z \omega$ – проекция на момента на импулса върху оста на въртене
$dp/dt = F$	$dL/dt = M$
$ma = F$	$I_z \varepsilon = M_z$
$E_k = mv^2/2$	$E_k = I_z \omega^2/2$

Задачи

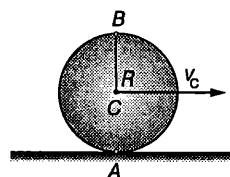
1. Еднороден цилиндър с маса $m = 2 \text{ kg}$ и радиус $R = 5 \text{ cm}$ се търкаля без хлъзгане по хоризонтална равнина (фиг.17-4). Скоростта на центъра на масите на цилиндъра е $v_C = 2 \text{ m/s}$. Инерчният момент на цилиндъра е $I_C = mR^2/2$.

Определете:

- ъгловата скорост ω на цилиндъра;
- скоростта v_A на точка A , която е в контакт с равнината, и скоростта v_B на най-горната точка B (фиг.17-4);
- кинетичната енергия на цилиндъра.

2. Топка за боулинг започва да се търкаля без хлъзгане по наклонена равнина. Определете

Фиг.17-4.



скоростта на центъра на масите C на топката след като последният се спусне на височина $h = 2$ м.

3. Горизонтална платформа може да се върти без триене около вертикална ос. Колко работа трябва да се извърши, за да се завърти платформата с ъглова скорост $\omega = 4 \text{ rad/s}$? Инерчният момент на платформата е $I = 300 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

4. Пресметнете кинетичната енергия на въртене на Земята около нейната ос. Приемете Земята за равномерно кълбо с радиус $R_3 = 6,4 \cdot 10^6$ м и маса $M_3 = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, което се върти около ос, минаваща през центъра му.

5. Еднороден цилиндър с маса m и радиус R се търкаля без хлъзгане по наклонена равнина, която сключва ъгъл α с хоризонта (фиг.17-3). Определете ускорението на центъра на масите на цилиндъра. Инерчният момент на цилиндъра е $I_C = mR^2/2$.

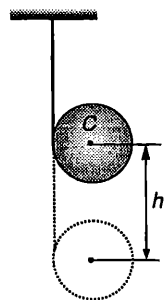
6. Около диск с маса m и радиус R е навита нишка. Единият край на нишката е завързан за тавана (фиг.17-5). В началния момент дискът е в покой. Изразете скоростта на центъра на масите C на диска като функция на изминатия от точка C път h : $v_C(h)$. Инерчният момент на диска е $I_C = mR^2/2$.

7. Еднородно топче с радиус r , което в началния момент е в покой в най-високата точка A на сфера (фиг.17-6), започва да се търкаля без хлъзгане по повърхността на сферата (сферата остава неподвижна). Определете ъгъла α , при който топчето ще се откъсне от сферата и ще продължи да пада свободно. Инерчният момент на топчето е $I = \frac{2}{5}mr^2$.

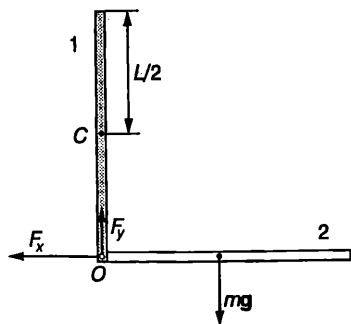
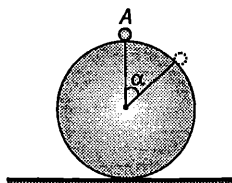
мент на топчето е $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Указание. Топчето ще се откъсне, когато силата на нормална реакция на опората стане нула ($N = 0$). В неинерциална отправна система, в която центърът на масите на топчето е в покой, $N = 0$, когато центробежната инерчна сила уравновеси компонентата на силата на тежестта, насочена към центъра на сферата.

Фиг.17-5.



Фиг.17-6.



Фиг.17-7.

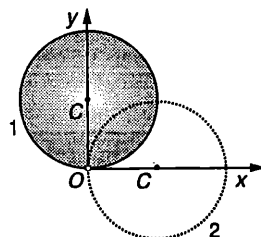
Използвайте също така закона за запазване на енергията.

8. Еднородна пръчка с дължина L и маса m пада без начална скорост от вертикалното положение 1 на фиг.17-7, въртейки се без триене около хоризонталната ос O . Определете хоризонталната компонента F_x и вертикалната компонента F_y на силата, с която оста O действа на пръчката, в момента, когато тя преминава през хоризонталното положение 2. Инерчният момент на пръчката спрямо оста O е $I = mL^2/3$.

Указание. В положение 2 центърът на масите на пръчката C се движи по окръжност с центростремително ускорение $\omega^2 L/2$, което се създава от силата F_x . Използвайте закона за запазване на механичната енергия, за да определите ъгловата скорост ω на пръчката. За определянето на F_y използвайте уравнението за моментите при въртенето на пръчката около оста O и уравнението за движението на центъра на масите по оста y . Между ъгловото ускорение ϵ и ускорението на центъра на масите a има кинематична връзка: $a = \epsilon(L/2)$.

8. Еднороден диск с маса m и радиус R може да се върти без триене около хоризонтална ос O , минаваща през периферията на диска. Дискът започва да пада без начална скорост от положение 1 на фиг.17-8. Определете ъгловата скорост ω на диска, хоризонталната компонента a_x и вертикалната компонента a_y на ускорението на неговия център на масите C , когато дискът е в положение 2.

Фиг.17-8.



18. Въртене около неподвижна точка и свободно движение на твърдо тяло

Главни инерчни оси

Нека началото O на неинерциалната отправна система, свързана с твърдо тяло, е неподвижно. Тялото се върти около моментна ос, минаваща през точка O . В общия случай векторът на момента на импулса на твърдото тяло не е насочен по оста на въртене, т.е. векторите $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не са успоредни (фиг.18-1). Доказва се, че при произволен избор на началото O през него могат да се прекарат три взаимно перпендикулярни оси x , y и z , при въртене около които моментът на импулса $\mathbf{L}$ е насочен по оста на въртене. Те се наричат *главни инерчни оси* на тялото за точка O . Удобно е главните инерчни оси да се изберат за координатни оси на отправната система, свързана с тялото. Инерчните моменти на тялото спрямо главните инерчни оси се наричат *главни инерчни моменти* (I_x , I_y и I_z). Когато тялото се върти около главна инерчна ос, моментът на импулса и ъгловата скорост са свързани с уравненията

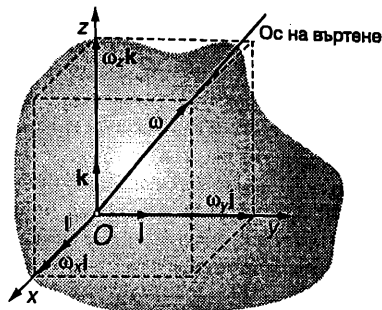
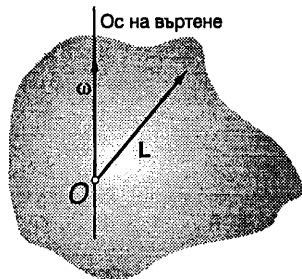
$$(18.1) \quad \mathbf{L} = I_x \boldsymbol{\omega};$$

$$(18.2) \quad \mathbf{L} = I_y \boldsymbol{\omega};$$

$$(18.3) \quad \mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}.$$

Уравнение (18.1) изразява връзката между $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$, когато въртенето е около главната инерчна ос x , (18.2) – при въртене около y и (18.3) – около z . При въртене около произволна моментна ос, минаваща през началото O , моментът на импулса е

Фиг.18-1.



Фиг.18-2.

$$(18.4) \quad \mathbf{L} = I_x \omega_x \mathbf{i} + I_y \omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k},$$

където ω_x , ω_y и ω_z са проекциите на ъгловата скорост върху главните инерчни оси, избрани за координатни оси на неинерциалната отправна система (фиг.18-2).

Доказва се, че когато началото O е неподвижно, кинетичната енергия на твърдото тяло при произволно въртене е

$$(18.5) \quad E_k = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

Главните инерчни оси, прекарани през центъра на масите C на твърдо тяло, се наричат *главни централни инерчни оси*, а съответните инерчни моменти – *главни централни инерчни моменти*.

Кинетичната енергия при произволно движение на твърдо тяло е

$$(18.6) \quad E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2),$$

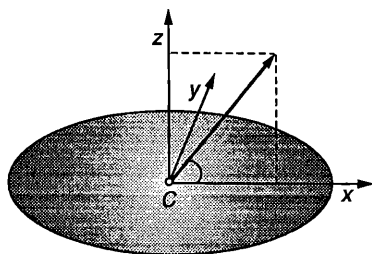
където m е масата на тялото, v_C – скоростта на центъра на масите на тялото, а I_x , I_y и I_z са главните централни инерчни моменти.

Най-лесно се намират главните централни инерчни оси на еднородни и симетрични тела. Например, ако тялото има равнина на симетрия, центърът на масите лежи върху нея. Една от главните централни инерчни оси е перпендикулярна на равнината на симетрия, а другите две лежат върху нея. Всички оси на симетрия са и главни централни инерчни оси (всички оси на симетрия преминават през центъра на масите).

Всяка ос, минаваща през центъра на еднородно кълбо или на еднородна сферична обвивка, е главна централна инерчна ос. За ротационните тела (диск, ци-

линдър, елипсоид, конус и др.) една от главните централни инерчни оси съвпада с оста на симетрия (избира за ос z на неинерциалната отправна система, свързана с тялото). Всяка ос, която преминава през центъра на масите и е перпендикулярна на оста на симетрия, също е главна инерчна ос. Затова при ротационните тела за координатни оси x и y на неинерциалната отправна система могат да се вземат две произволни взаимно перпендикулярни оси, които минават през центъра на масите и са перпендикулярни на оста на симетрия – те винаги са главни оси. Инерчните моменти на ротационните тела спрямо всички главни централни инерчни оси, перпендикулярни на оста на симетрия, са равни: $I_x = I_y$.

Пример 18.1. Определете кинетичната енергия на диск с маса m и радиус R , въртящ се с ъглова скорост ω около ос, която минава през центъра на масите C на диска и сключва ъгъл θ с неговата повърхност.



Фиг.18-3.

Решение. Всички оси, които лежат в равнината на диска и минават през центъра на масите му, поради симетрията, са главни централни инерчни оси. Удобно е да изберем оста y да бъде перпендикулярна на ъгловата скорост ω (фиг.18-3). Тогава проекциите на ω върху главните централни инерчни оси на диска са:

$$\omega_x = \omega \cos \theta; \omega_y = 0; \omega_z = \omega \sin \theta.$$

В уравнение (18.6) за кинетичната енергия полагаме $v_C = 0$, $I_x = mR^2/4$, $I_z = mR^2/2$ и заместяваме съответните компоненти на ъгловата скорост на диска. Получаваме

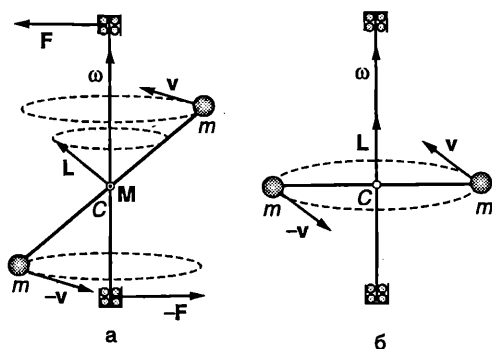
$$E_k = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_z \omega_z^2) = \frac{1}{8}mR^2 \omega^2 (2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{8}mR^2 \omega^2 (1 + \sin^2 \theta).$$

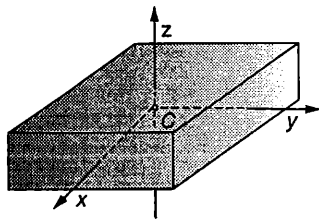
Свободни оси

На фиг.18-4а е показана гира, която се върти с постоянна ъглова скорост ω около метална ос, минаваща през центъра на масите на гирата. Оста е закрепена между лагери, които не позволяват тя да променя направлението си. Моментът на импулса L на гирата, определен спрямо неподвижния център на масите C на гирата, остава постоянен по големина, но непрекъснато променя посоката си, описвайки кръгов конус около оста на въртене. Тъй като моментът на импулса може да се изменя само под действие на външни сили, следва изводът, че промяната на посоката на L се дължи на силите, с които лагерите действат на системата. Те създават двойка сили, лежаща в една равнина с оста на въртене. Въртящият момент M на двойката е перпендикулярен на L и води единствено до изменение на посоката на момента на импулса. Съгласно с третия принцип на механиката оста действа на лагерите с равни по големина и противоположни по посока сили. Казва се, че системата е *динамически небалансирана*. Динамичният дисбаланс при автомобилните колела, при въртящите се части на машини и др. води до тяхното бързо износване, поради което се вземат мерки за неговото отстраняване.

Дисбаланс няма, когато оста на въртене съвпада с главна централна инерчна ос. Тогава моментът на импулса L е насочен по оста на въртене (фиг.18-4б) и по време на въртенето не се изменя нито по големина, нито по посока. Следователно в този случай за запазване неизменно

Фиг.18-4.





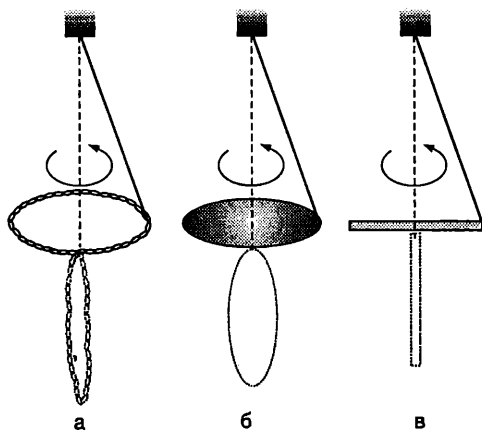
Фиг.18-5. Свободни оси.

направлението на оста на въртене не е необходимо към нея да се прилагат външни сили. Ос, чието положение в пространството в отсъствие на външни сили не се променя, когато тялото се върти с постоянна ъглова скорост около нея, се нарича *свободна ос* на тялото.

От казаното е ясно, че *главните централни инерчни оси са и свободни оси*.

Опитно и теоретично се доказва, че в отсъствие на външни сили устойчиво е само въртенето около главни централни оси (свободни оси), спрямо които инерчният момент на тялото има екстремална (максимална или минимална) стойност. Например, ако подхвърлим кибритена кутия (фиг.18-5) и едновременно с това я завъртим, ще установим, че въртенето е устойчиво, ако се извършва около оста z (инерчният момент I_z има максимална стойност) или около оста x (инерчният момент I_x е минимален). Инерчният момент спрямо третата главна централна ос y има меж-

Фиг.18-6. Устойчиво е въртенето около свободната ос, спрямо която инерчният момент на тялото е максимален.



динна стойност ($I_x < I_y < I_z$), поради което въртенето около оста y е неустойчиво – кутията започва да се преобръща във въздуха. Ще отбележим, че в случая силата на тежестта не влияе на въртенето, защото е приложена към центъра на масите на кутията и не създава въртящ момент спрямо свободните оси (главните централни инерчни оси).

При наличие на външна сила, например силата на опъване на нишката, към която е закачено въртящото се тяло, устойчиво е само въртенето около главната централна ос, спрямо която инерчният момент на тялото има максимална стойност. Това се потвърждава от демонстрационните опити, схематично представени на фиг.18-6. Верижка (а), диск (б) и тънка пръчка (в) се завързват с нишка за оста на центробежна машина. На фигурата е показано положението на телата, когато машината се върти с голяма ъглова скорост. Всяко от телата се върти около свободната си ос (главна централна инерчна ос), спрямо която инерчният му момент е максимален.

*Свободно движение на ротационно тяло

Ще разгледаме движението на ротационно тяло, на което не действат сили. Ще смятаме, че центърът на масите C е неподвижен. Твърдото тяло в случая е затворена механична система, чийто момент на импулса се запазва: $L = const$. Кинетичната енергия на въртене също се запазва. Моментът на импулса L е определен спрямо неподвижната точка C , която ще изберем едновременно за начало както на инерциална отправна система K_1 , така и на неинерциална отправна система K , свързана с тялото. В общия случай посоката на ъгловата скорост ω не съвпада с посоката на L (фиг.18-7а). Избираме оста z_1 на K_1 -системата да е насочена успоредно на L , а координатните оси на K -системата да съвпадат с три от главните централни инерчни оси: оста z съвпада с оста на симетрия, а осите x и y за ротационно тяло могат да се изберат произволно. Заменяме $I_y = I_x$ в уравнението за момента на импулса (18.4) и в уравнението за кинетичната енергия (18.5). Повдигаме на

квадрат двете страни на уравнение (18.4) и получаваме

$$(18.7) \quad \begin{aligned} L^2 &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \\ &= (\omega_x^2 + \omega_y^2)I_x^2 + \omega_z^2 I_z^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

$$(18.8) \quad 2E_k = (\omega_x^2 + \omega_y^2)I_x + \omega_z^2 I_z = \text{const.}$$

От уравнения (18.7) и (18.8) следва, че при $I_z \neq I_x$:

$$(18.9) \quad \omega_z = \text{const.};$$

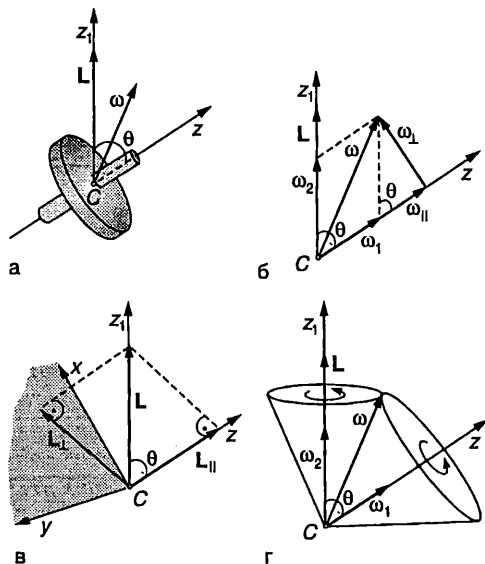
$$(18.10) \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const.}$$

Следователно по време на движение-то проекцията на ъгловата скорост върху оста на симетрия (оста z) ω_z не се изменя. Да означим с θ ъгъла между осите z и z_1 (фиг.18-7). Проекцията на момента на импулса върху оста z е $L_z = L \cos \theta$. От друга страна $L_z = \omega_z I_z$. Следователно $\cos \theta = \omega_z I_z / L = \text{const.}$, т.е. ъгълът θ между неподвижната ос z_1 и оста на симетрия z , наречен *ъгъл на нутация*, не се изменя по време на движението.

Тъй като $I_x = I_y$, уравнение (18.4) за момента на импулса може да се запише във вида

$$(18.11) \quad \mathbf{L} = I_x \boldsymbol{\omega}_\perp + I_z \omega_\parallel \mathbf{e}_z = \mathbf{L}_\perp + \mathbf{L}_\parallel,$$

Фиг.18-7.



където $\boldsymbol{\omega}_\perp = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}$ е компонентата на ъгловата скорост, която е перпендикулярна на оста на симетрия z , а $\omega_\parallel = \omega_z \mathbf{k}$ е успоредната на оста z компонента (фиг.18-76). Съгласно с равенство (18.10)

$$\omega_\perp^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const.}$$

Следователно големината на ъгловата скорост не се изменя с течение на времето

$$\omega = \sqrt{\omega_\perp^2 + \omega_\parallel^2} = \text{const.}$$

Ще докажем, че през цялото време на движението векторът $\boldsymbol{\omega}$ (прекаран от неподвижното начало C) лежи в равнината $z_1 z$. Действително, за да се изпълнява векторното равенство (18.11), във всеки момент от времето трите вектора, влизащи в него, трябва да лежат в една равнина. По определение векторите $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ са насочени съответно по осите z_1 и z , т.е. лежат в равнината $z_1 z$. Следователно векторът $\boldsymbol{\omega}_\perp$ също лежи в нея, както и векторът $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\parallel + \boldsymbol{\omega}_\perp$.

И така, при свободно въртене (по инерция) на твърдо тяло с ротационна симетрия ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}$ във всеки момент от времето лежи във равнината $z_1 z$, определена от вектора на момента на импулса (неподвижна ос z_1) и оста на симетрия на тялото (ос z). Ъгълът θ между осите z_1 и z не се изменя с течение на времето. Не се изменя също така ориентацията на вектора $\boldsymbol{\omega}$ спрямо осите z_1 и z , както и неговият модул ω . Затова векторът $\boldsymbol{\omega}$ може да се разложи по правилото на успоредника на две компоненти

$$(18.12) \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2,$$

където компонентата $\boldsymbol{\omega}_1$ е успоредна на оста z , а компонентата $\boldsymbol{\omega}_2$ е успоредна на оста z_1 (фиг.18-76), които не се изменят с течение на времето. Така свободното движение на тялото се представя като сума от две независими въртения: въртене на тялото с постоянна ъглова скорост ω_1 около оста му на симетрия z и едновременно с това въртене на самата ос z (заедно с цялата равнина $z_1 z$) около неподвижната ос z_1 с ъглова скорост ω_2 . Такова движение на твърдо тяло се нарича *свободна (регулярна) прецесия*.

Ще пресметнем ъгловите скорости на прецесия ω_1 и ω_2 . От триъгълниците на чер-

тежа на *фиг.18-7б* записваме

$$(18.13) \quad \omega_1 = \omega_{\parallel} - \frac{\omega_{\perp}}{\operatorname{tg} \theta}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_{\perp}}{\sin \theta}.$$

От уравнение (18.11) и от чертежа на *фиг.18-7в* следват съотношенията:

$$L_{\perp} = \omega_{\perp} I_x; \quad L_{\parallel} = \omega_{\parallel} I_z; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}}; \quad \sin \theta = \frac{L_{\perp}}{L}.$$

След заместване на ω , $\sin \theta$ и $\operatorname{tg} \theta$ в уравнения (18.13) получаваме

$$(18.14) \quad \omega_1 = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_{\parallel}; \quad \omega_2 = \frac{L}{I_x}.$$

Тялото се върти спрямо равнината $z_1 z$ с ъглова скорост ω_1 , а векторът ω през цялото време лежи в равнината $z_1 z$. Следователно спрямо тялото векторът ω се върти със същата по големина ъглова скорост, но в противоположна посока, т.е. векторът ω описва кръгов конус около оста на симетрия z с ъглова скорост

$$(18.15) \quad \omega'_1 = -\omega_1 = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_{\parallel}.$$

Свободна прецесия извършват не само ротационните тела, но и всички твърди тела, за които $I_x = I_y$. При свободна прецесия тялото се върти около оста на симетрия z с ъглова скорост ω_1 , а самата ос на симетрия описва кръгов конус, чиято ос съвпада с момента на импулса L . Можем да използваме следния нагледен геометричен модел: Да построим два допиращи се кръгови конуса: единия чрез завъртане на вектора ω около оста z_1 , а другия – чрез завъртане на вектора ω около оста z (*фиг.18-7г*). Конусът 2 се търкаля без хлъзгане по повърхността на конуса 1. Във всеки момент от времето ъгловата скорост ω е насочена по допирателната на двата конуса. При търкалянето конусът 2 се върти около оста си z с ъглова скорост ω_1 , а самата ос z описва кръгов конус около неподвижната ос z_1 с ъглова скорост ω_2 . Допирателната на двата конуса (ъгловата скорост ω) от своя страна се върти с ъглова скорост $\omega'_1 = -\omega_1$ около оста z и с ъглова скорост ω_2 около оста z_1 .*

Задачи

1. Центрофуга с инерчен момент $I = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ се върти около оста си (главна централна инерчна ос) с ъглова скорост $\omega = 30 \text{ rad/s}$. Определете момента на импулса на центрофугата.

2. Диск с маса m и радиус R се върти с ъглова скорост ω около ос, която сключва ъгъл θ с повърхността на диска (*фиг.18-3*). Определете големината на момента на импулса на диска.

*3. Еднороден цилиндър с маса m , радиус R и височина h се върти с ъглова скорост ω около ос, която минава през центъра на масите C на цилиндъра и сключва ъгъл α с оста му на симетрия z (*фиг.18-8*). Определете:

а) големината на момента на импулса L на цилиндъра;

б) ъгъла θ , който векторът L сключва с оста на цилиндъра z ;

в) кинетичната енергия на цилиндъра. Главните централни инерчни моменти на цилиндъра са: $I_x = I_y = mR^2/4 + mh^2/12$; $I_z = mR^2/2$.

*4. Еднороден диск с маса m и радиус R се търкаля без хлъзгане по хоризонтална равнина и едновременно с това се върти с ъглова скорост ω_0 около вертикална ос, разположена на разстояние d от центъра на масите C на диска (*фиг.18-9*). Определете кинетичната енергия на диска.

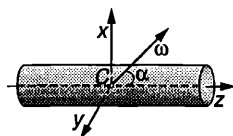
Указание. На *фиг.18-9* са показани главните централни оси на диска. Компонентите на ъгловата скорост са: $\omega_x = \omega_0$, $\omega_y = 0$ и $\omega_z = \omega_1$. Тъй като дискът се търкаля без хлъзгане, докажете, че между ъгловата скорост ω_1 на въртене на диска около оста му z и ъгловата скорост ω_0 на въртене около вертикалната ос има кинематична връзка: $\omega_0 d = \omega_1 R$. Използвайте уравнение (18.6), в което изразете скоростта v_C на центъра на масите на диска чрез ω_0 и d . Главните централни инерчни моменти на диска са: $I_x = I_y = mR^2/4$; $I_z = mR^2/2$.

*5. Еднороден диск се върти по инерция около своя център на масите. В началния момент ъгловата скорост ω сключва ъгъл α с повърхността на диска. Определете (вж. *фиг.18-7*):

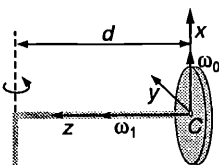
а) ъгловите скорости на прецесия ω_1 и ω_2 ;

б) ъгъла на нутация θ .

Фиг.18-8.



Фиг.18-9.



19. Жироскопи

Елементарна теория на симетричен жироскоп

Симетричен жироскоп се нарича ротационно тяло, което се върти около неподвижна точка O (в общия случай точка O може да не съвпада с центъра на масите C на тялото). Оста на симетрия на тялото се нарича *ос на жироскопа*. Моментната стойност на ъгловата скорост ω може да се разложи на две компоненти: едната успоредна, а другата – перпендикулярна на оста на жироскопа z (фиг.19-1)

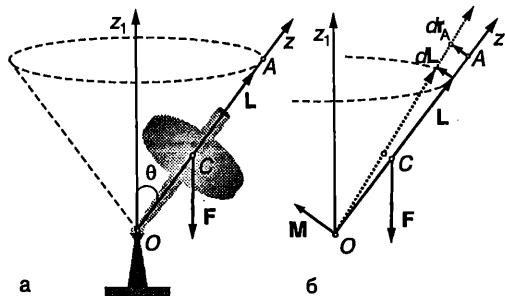
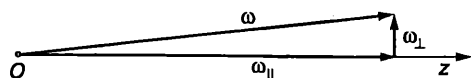
$$(19.1) \quad \omega = \omega_{\parallel} + \omega_{\perp}.$$

Ако $\omega_{\parallel} \gg \omega_{\perp}$, можем да пренебрегнем перпендикулярната компонента $\omega_{\perp}$ на ъгловата скорост и да смятаме, че векторът ω винаги е насочен по оста z (за жироскопите, които се използват в техниката, $\omega_{\parallel}$ е стотици хиляди пъти по-голяма от $\omega_{\perp}$). Тогава съгласно с уравнение (18.4) моментът на импулса

$$(19.2) \quad L = I_x \omega_{\perp} + I_z \omega_{\parallel} \approx I_z \omega_{\parallel} \approx I_z \omega$$

също е насочен по оста z . Следователно, в рамките на направеното приближение, за да изследваме как се изменя направлението на оста на жироскопа, достатъчно е да определим изменението на посоката на вектора L под действие на въртящите моменти на приложените към жироскопа сили. Когато на жироскопа не действат сили (свободен жироскоп), неговият момент на импулса L не се променя и оста на жироскопа запазва неизменна ориентацията си спрямо инерциална отправна система (например отправната система, свързана с неподвижните звезди). На това свойство на жироскопите се основават редица техни приложения: навигационни прибори като жирокompаси и жирохоризонти, устройства за автоматично управление и стабилизация на движението на самолети (автопилот), ракети, морски съдове и др.

Фиг.19-1.



Фиг.19-2.

Да въздействаме върху оста на жироскопа за кратко време със сила F , която създава въртящ момент M спрямо неподвижната точка O (фиг.19-2). Записваме уравнението за моментите

$$(19.3) \quad \frac{dL}{dt} = M.$$

Векторът M е насочен перпендикулярно на оста на жироскопа. Да разгледаме произволна точка A от оста на жироскопа с радиус-вектор r_A (фиг.19-2). Съгласно с направеното приближение моментът на импулса L винаги е насочен по оста на жироскопа, т.е. векторите r_A и L са колинеарни: $r_A = cL$, където c е константа. Скоростта на точка A е

$$(19.4) \quad v_A = \frac{dr_A}{dt} = c \frac{dL}{dt} = cM.$$

Следователно точка A и заедно с нея оста на жироскопа се отклоняват в направление на вектора M .

И така, ако върху оста на бързо въртящ се жироскоп се подейства със сила, оста не се завърта по посока на силата, както би станало, ако жироскопът беше неподвижен, а се отклонява по посока на въртящия момент M , т.е. в перпендикулярно на силата направление.

Нека сега върху жироскопа действа постоянна сила, която по време на движението на жироскопа остава в равнината, определена от неподвижната ос z_1 , минаваща през неподвижната точка O , и от оста на жироскопа z . Такава сила е например силата на тежестта (фиг.19-2). Тъй като, както вече установихме, оста z на жироскопа не се отклонява по посока на

действащата сила, ъгълът θ между осите z_1 и z остава постоянен, а скоростта на произволна точка A от оста z е перпендикулярна на равнината z_1z . Следователно оста z ще се върти около неподвижната ос z_1 с някаква ъглова скорост Ω , наречена *ъглова скорост на прецесия*. Самото движение на оста z се нарича *прецесия на жироסקопа*. Точка A от оста z се движи по окръжност със същата ъглова скорост Ω . Линеината и ъгловата скорост на точка A са свързани с познатото съотношение

$$\mathbf{v}_A = \Omega \times \mathbf{r}_A = \Omega \times (d\mathbf{L}).$$

Заместваме $\mathbf{v}_A$ в уравнение (19.4) и след като съкратим коефициента с получаваме

$$(19.5) \quad \Omega \times \mathbf{L} = \mathbf{M}.$$

Това е основното уравнение в елементарната (прецесионна) теория на жироскопа. От него може да се определи ъгловата скорост на прецесия в различни конкретни случаи.

Пример 19.1. Симетричен жироскоп се върти с ъглова скорост $\omega = 400 \text{ rad/s}$ около оста си на симетрия z , която сключва ъгъл $\theta = 30^\circ$ с вертикалата (фиг.19-3).

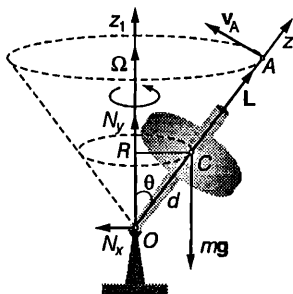
а) Пресметнете ъгловата скорост Ω на прецесия и периода T на прецесия.

б) Колко е хоризонталната компонента N_x на силата на реакция на опората в неподвижната точка O на жироскопа?

Масата на жироскопа е $m = 0,5 \text{ kg}$, инерчният момент е $I_z = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Разстоянието от неподвижната точка O до центъра на масите C на жироскопа е $d = 0,1 \text{ m}$.

Решение. Њгловата скорост на прецесия ще определим от основното уравнение (19.5) в елементарната теория на жироскопа, което ще запишем като равенство между модулите на

Фиг.19-3.



векторите

$$|\Omega \times \mathbf{L}| = |\mathbf{M}|.$$

Модулът на момента на силата на тежестта е $|\mathbf{M}| = mgd \sin \theta$. Векторът на ъгловата скорост на прецесия (фиг.19-3) е насочен вертикално нагоре (по неподвижната ос z_1) и сключва ъгъл θ с момента на импулса $\mathbf{L}$. Следователно $|\Omega \times \mathbf{L}| = \Omega L \sin \theta = \Omega I_z \omega \sin \theta$, където сме отчели, че $L = I_z \omega$. След заместване на двата модула в основното уравнение, получаваме

$$\Omega = \frac{mgd}{I_z \omega} = \frac{(0,5 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(0,1 \text{ m})}{(2 \cdot 10^{-3} \text{ kg})(400 \text{ rad/s})} = 0,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 10,5 \text{ s}.$$

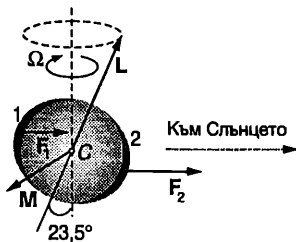
Числените стойности показват, че ъгловата скорост на прецесия е много по-малка от ъгловата скорост на въртене на жироскопа. Освен това Ω не зависи от ъгъла θ , който оста на жироскопа сключва с вертикалата.

б) Поради прецесията центърът на масите на жироскопа се движи с ъглова скорост Ω по окръжност с радиус $R = d \sin \theta$, която лежи в хоризонтална равнина (фиг.19-3). Тъй като силата на тежестта няма хоризонтална компонента, движението по окръжност става единствено под действие на хоризонталната компонента N_x на силата на реакция в опорната точка O : силата N_x създава центростремителното ускорение $a_n = \Omega^2 R$ на центъра на масите C . Записваме уравнението за движението на центъра на масите, $N_x = ma_n = m\Omega^2 R$ и, след като заместим R , получаваме

$$N_x = m\Omega^2 d \sin \theta = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Прецесия на Земята

Земята, която се върти около оста си с период 24 часа, може да се разглежда като жироскоп, чиято ос е наклонена спрямо равнината на земната орбита (фиг.19-4). Ако Земята беше еднородно кълбо, резултантната гравитационна сила, с която ѝ действат Луната и Слънцето, щеше да минава през центъра на масите C на Земята и нямаше да създава въртящ момент спрямо точка C . В действителност обаче Земята е сплесната – повече маса е натрупана в екваториалната област. Затова на частта 2 (фиг.19-4), която е по-близо до



Фиг.19-4. Прецесия на Земята.

Слънцето, действа по-голяма сила, отколкото на по-отдалечената част 1. Резултантната от двете сили не минава през центъра на масите на Земята и създава въртящ момент, чиято посока е показана на *fig.19-4*. Под негово действие Земята извършва бавна прецесия с период около 25 800 години. Луната, която е по-близо до Земята, оказва по-силно влияние върху прецесията, отколкото Слънцето. В резултат на прецесията се изменя времето от годината, когато определена звезда се вижда на дадено място от небосклона. За 2 000 години това време се отмества с един месец. Бавно се отместват и годишните времена. Например след 12 900 години зимата ще се смени с лятото.

Нутация

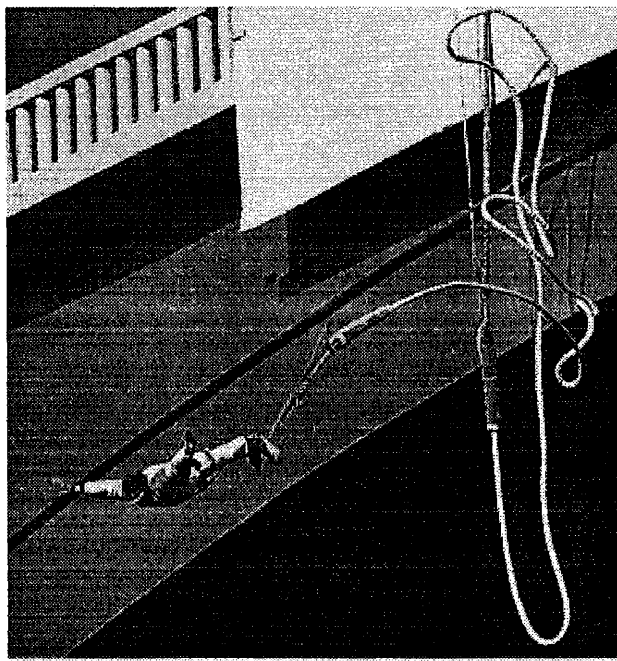
Ако наблюдаваме внимателно движението на жирокоп, ще установим, че освен описване на кръгов конус с ъгъл θ (прецесия), оста на жирокопа извършва още едно движение – периодично отклонение във вертикално направление, при което ъгълът на наклона θ на оста се изменя в определени граници. Такова движение се нарича *нутация*. Нутацията се обяснява от точната теория на жирокопа, на която няма да се спираме. Ще се ограничим с качествено разглеждане на това явление. Нека в началния момент жирокопът е завъртян около оста си, която се придържа неподвижна под ъгъл θ_0 спрямо вертикалата. Освобождаваме оста. Моментът на силата на тежестта е насочен хоризонтално. Следователно вертикалната компонента на момента на импулса на жирокопа не може да се изменя ($L \cos \theta_0 = \text{const}$). Когато жирокопът започне прецесия, центърът на масите му се движи с ъглова ско-

рост Ω по окръжност с радиус R . На това движение на центъра на масите съответства момент на импулса $L_C = \Omega I_C = \Omega m R^2$, който е насочен вертикално нагоре. За да не се измени вертикалната компонента на пълния импулс на системата, т.е. за да се изпълнява равенството $L \cos \theta + \Omega m R^2 = L \cos \theta_0 = \text{const}$, трябва оста на жирокопа, а заедно с нея и центърът на масите, да се спуснат надолу (нараства ъгълът θ). Това означава, че в началния момент силата на нормална реакция N_y в опорната точка O (*fig.19-3*) е по-малка от силата на тежестта mg . Когато ъгълът θ нараства, силата N_y също нараства и става по-голяма от mg . Центърът на масите достига някакво най-ниско положение, след което започва да се издига нагоре, при което издигане силата N_y намалява и т.н. – центърът на масите и оста на жирокопа извършват трептене във вертикално направление (нутация). Едновременно с това оста на жирокопа описва кръгов конус около вертикалната ос, минаваща през неподвижната точка на жирокопа (прецесия). Траекторията на центъра на масите при нутация зависи от началните условия. Нутацията може да се избегне, ако на жирокопа се даде начален тласък, така че той да получи допълнителен момент на импулса, равен на момента на импулса на кръговото движение на центъра на масите при прецесия. Такава прецесия (без нутация) се нарича *регулярна прецесия*.

Задачи

1. Детски пумпал с маса $m = 0,5$ kg и инерчен радиус $\rho = 4$ cm е завъртян с ъглова скорост $\omega = 150$ rad/s върху хоризонтална маса. Оста на пумпала сключва ъгъл $\theta = 30^\circ$ с вертикалата. При какъв коефициент на триене k между масата и върха на пумпала последният няма да се хлъзга по масата? Разстоянието от опорната точка на пумпала до центъра на масите му е $d = 7$ cm.
2. В асансьор, който се издига равноускорително с ускорение a , е поставен жирокоп – однороден диск с радиус r и маса m (*fig.19-3*). Разстоянието от неподвижната точка O до центъра на масите на диска C е d . Определете ъгловата скорост ω на диска, ако ъгловата скорост на прецесия е Ω . Масата на пръчката, на която е закрепен дискът, се пренебрегва.

Еластични свойства на телата



Всички реални тела под действие на сили променят формата и обема си, а при определени условия приложените сили могат да предизвикат дори разкъсване или пречупване на тялото. Отместването на градивните частици на телата една спрямо друга и изменението на относителните разстояния между тях се нарича деформация на тялото. При твърдите тела са характерни два гранични случая на еластични и пластични деформации. Когато след прекратяване действието на силите изцяло се възстановява началното недеформирано състояние, деформациите се наричат еластични. Пластични или остатъчни са деформациите, които остават в тялото след премахване на силите. Деформациите на реалните тела са само частично еластични – в тях винаги остават, макар и малки, остатъчни деформации. В тази глава ще разгледаме само еластичните деформации и основните величини и закономерности, които ги описват.

20. Разтягане и свиване на еднородна пръчка

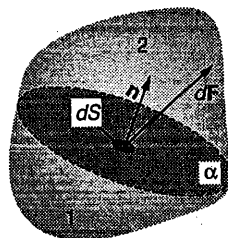
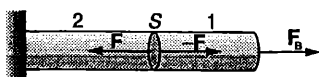
Еластичност

В най-общия смисъл под еластичност се разбира стремението на телата да възстановят своя обем или форма, които са били изменени под действие на външни сили. Съществува два вида еластичност – *обемна еластичност* и *еластичност на формата*. Обемната еластичност е характерна за всички тела, включително за течностите и газовете. При газовете обаче обемната еластичност има едностранен характер – те се противопоставят на външните сили, стремящи се да намалят обема на газа, докато разширението се извършва свободно. Еластичност на формата притежават единствено твърдите тела. За някои твърди тела еластичността на формата е слабо изразена. Такива тела се наричат пластични. Примери за пластични материали са восъкът, глината, оловото и др. Телата, направени от пластични материали, лесно изменят формата си под действие на външни сили.

Еластични сили и напрежения

На *фиг.20-1* е показана цилиндрична пръчка, единият край на която е закрепен, а към другия е приложена сила F_b . Да прекараме мислено напречно сечение, разделящо пръчката на две части. За да бъде част 1 в покой, трябва силата F , с която ѝ действа другата част 2, да уравни външната сила F_b , т.е. $F + F_b = 0$. Съгласно с третия принцип на механиката част 1 действа на част 2 с равна по големина и противоположна по посока сила $-F$ (*фиг.20-1*). Следователно, ако мислено разделим едно деформирано тяло на две части, те ще си взаимодействат със сили, разпределени по допирната повърхност на тези две части. Това са т.нар. вътрешни *еластични сили*. Еластич-

Фиг.20-1.



Фиг. 20-2.

ните сили са резултат от електромагнитните взаимодействия между атомите и молекулите. Тяхното изследване на атомно равнище е обект на физиката на твърдото тяло. Механиката дава само макроскопично описание на еластичните свойства на телата, като ги характеризира с макроскопични величини, които могат да се измерят експериментално.

Да разделим мислено деформирано тяло на две части. Еластичните сили на взаимодействие между тях са разпределени в общия случай неравномерно по разделителната повърхност α (*фиг.20-2*). Да означим с dF силата, с която част 1 действа на част 2 през малката площадка dS от α . Разлагаме силата dF на две компоненти: нормална компонента dF_n , насочена успоредно на нормалата n към площадката, и тангенциална компонента dF_t , която е успоредна на площадката.

Величината

$$(20.1) \quad \sigma_n = \frac{dF_n}{dS}$$

се нарича *нормално еластично напрежение*, а величината

$$(20.2) \quad \sigma_t = \frac{dF_t}{dS}$$

се нарича *тангенциално еластично напрежение*.

Големината на нормалното и на тангенциалното напрежение зависи от ориентацията на разглежданата площадка. В случай на равномерно деформирано тяло може да се избере такова напречно сечение, че еластичните сили да са равномерно разпределени по цялото сечение и в зависимост от вида на деформацията да се насочени перпендикулярно или танген-

циално на избраното сечение S . Тогава съответните напрежения са

$$(20.3) \quad \sigma_n = \frac{F}{S}$$

или

$$(20.4) \quad \sigma_t = \frac{F}{S}.$$

Еластичното напрежение е равно на еластичната сила, която действа на единица площ от деформираното тяло. Измерва се в нютон на квадратен метър (N/m^2) или паскал ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$).

Закон на Хук

Еднородна цилиндрична пръчка, единият край на която е закрепен, е разтегната равномерно под действието на външна сила (фиг.20-3а). Да означим с ℓ_0 дължината на пръчката в недеформирано състояние, а с $\Delta\ell$ нейното удължение след деформацията. Безразмерната величина

$$(20.5) \quad \varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$$

се нарича *относителна деформация* на пръчката.

Когато пръчката се разтяга, относителната деформация има положителни стойности ($\Delta\ell > 0$ и $\varepsilon > 0$). Еластичните сили са перпендикулярни на напречното сечение на пръчката, а съответстващите им нормални еластични напрежения се наричат *напрежения на разтягане* и се бележат с t ($\sigma_n = t$). Когато външни сили свиват пръчката (фиг.20-3б), относителната деформация е отрицателна ($\Delta\ell < 0$ и $\varepsilon < 0$), а съответните еластични напрежения се наричат *напрежения на налягане* или само *налягане* p ($\sigma_n = p$).

Опитът показва, че при малки относителни деформации еластичните напреже-

ния на разтягане t (или на налягане p) са пропорционални на относителната деформация ε

$$(20.6) \quad t = E\varepsilon \text{ и } p = -E\varepsilon.$$

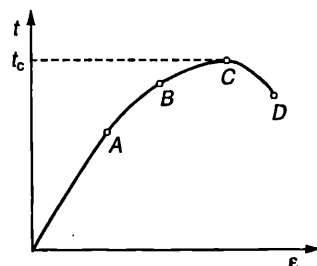
Коефициентът на пропорционалност E е константа, която не зависи от размерите на пръчката, а характеризира единствено еластичните свойства на материала, от който тя е направена. Нарича се *модул на Юнг* в чест на английския физик Томас Юнг (1773–1829). Модулът на Юнг се измерва в същите единици, както еластичното напрежение – нютон на квадратен метър (N/m^2). От уравнение (20.6) се вижда, че модулът на Юнг е равен на напрежението, което би възникнало при относителна деформация $\varepsilon = 1$, при условие, че линейната зависимост (20.6) остава в сила при такива големи деформации. Стойностите на модула на Юнг за някои материали са дадени в таблица 20.1.

Уравненията (20.6) изразяват закона за еластичните деформации на разтягане или свиване на пръчка, който е установен експериментално още през 1678 година от английския физик Роберт Хук (1635–1703) и в негова чест се нарича *закон на Хук*.

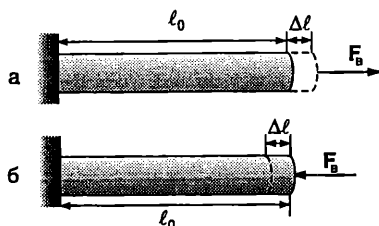
Пластичност

В зависимост от големината на относителната деформация ε експериментално са установени няколко области, в които зависимостта на напрежението от деформацията има различен характер. Например при разтягане на еднородна пръчка в началото, при много малки стойности на ε , зависимостта между напрежението на разтягане t и относителната деформация ε е линейна (фиг.20-4) – в сила е законът на Хук (20.6). Точка А от графиката

Фиг.20-4.



Фиг.20-3.



на *фиг.20-4* се нарича *граница на линейност*. След нея деформациите продължават да са еластични, т.е. след премахване на външната сила се възстановява недеформираното състояние, но зависимостта $t(\epsilon)$ вече не е линейна. Точка *B* от графиката определя т.нар. *граница на еластичност*. След нея следва областта *BC* на пластични деформации – след премахване на външната сила само частично се възстановява началното състояние. Точка *C* определя *границата на издръжливост*. Напрежението на разтягане t_c (или налягането p_c), съответстващо на границата на издръжливост, е важна характеристика за здравината на материалите (вж. таблица 20.1).

Ако се премине границата на издръжливост, пръчката продължава да се разтяга, дори под действие на по-малки сили, и при достигане на точка *D* тя се скъсва. Ако точките *C* и *D* са разположени близо една до друга, материалът е крехък (чугун, стомана и др.). Когато точките *C* и *D* са отдалечени една от друга, материалът е мек (ковък) – меки са оловото, медта и др.

Таблица 20.1. Еластични свойства на някои материали.

Материал	Модул на Юнг E , N/m ²	Граница на издръжливост, t_c , N/m ²
Стомана	$20 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^8$
Алуминий	$7 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^8$
Съкло	$7 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^7$
Кости	$1,6 \cdot 10^{10}$	$1,2 \cdot 10^8$
Кръвоносни съдове	$2 \cdot 10^5$	

Коефициент на Поасон

При разтягане или свиване на цилиндрична пръчка се изменя не само дължината, но и диаметърът D на пръчката. При свиване диаметърът нараства ($\Delta D > 0$), а при разтягане – намалява ($\Delta D < 0$). В недеформирано състояние пръчката има дължина ℓ_0 и диаметър D_0 . Външни сили разтягат пръчката, при което дължината ѝ нараства с $\Delta \ell$, а диаметърът намалява с ΔD . Отношението на модула на относителното изменение на диаметъра на пръчката към модула на относителното изменение на нейната дължина

(20.7)

$$\mu = \frac{|\Delta D/D_0|}{|\Delta \ell/\ell_0|}$$

се нарича *коефициент на Поасон*, в чест на френския физик и математик Симеон Денис Поасон (1781–1840). Коефициентът на Поасон μ е безразмерна величина, характеризираща еластичните свойства на материалите.

В тази глава ще разглеждаме еластичните свойства на еднородни и изотропни тела. (Изотропни се наричат тела, чиито физични свойства, в частност еластични свойства, не зависят от направлението.) Доказва се, че модулът на Юнг E и коефициентът на Поасон μ напълно определят еластичните свойства на изотропните еднородни твърди тела. Всички останали еластични модули, характеризиращи различните видове деформации, се изразят чрез E и μ .

Еластична енергия на деформирана пръчка

При деформиране на телата външни сили извършват работа. От своя страна деформираното тяло в процеса на възстановяване на недеформираното си състояние извършва работа върху околните тела, т.е. то притежава потенциална енергия. Потенциалната енергия на деформираните тела се нарича *еластична потенциална енергия* или за краткост само *еластична енергия*.

Ще пресметнем еластичната енергия на разтегната пръчка. Като отчетем уравнения (20.4) и (20.5), записваме закона на Хук (20.6) във вида

$$(20.8) \quad \frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad \text{или} \quad F = \frac{ES}{\ell_0} \Delta \ell,$$

където S е напречното сечение на пръчката. Следователно еластичната сила F е право пропорционална на удължението $\Delta \ell$ на пръчката. Ако пръчката се разтяга много бавно, може да се смята, че във всеки момент от времето тя е в покой, т.е. външната сила е равна по големина на еластичните сили на взаимодействие в произволно избрано напречно сечение на пръчката (*фиг.20-1*): $F_a = F$. Работата на външната сила за безкрайно малко разтягане dx

на пръчката е

$$dA = F_b dx = F dx = \frac{ES}{\ell_0} x dx.$$

Работата за разтягане на пръчката от $x = 0$ до $x = \Delta \ell$ е

$$(20.9) \quad A = \frac{ES}{\ell_0} \int_0^{\Delta \ell} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{\ell_0} (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} F \Delta \ell,$$

където F е еластичната сила при деформация на пръчката $\Delta \ell$. Работата на външната сила е равна на изменението на еластичната енергия:

$$(20.10) \quad A = W - W_0 = W,$$

където сме отчели, че в началния момент пръчката не е деформирана и сме приели, че еластичната енергия на недеформирано тяло е нула ($W_0 = 0$).

Еластичната енергия в единица обем от веществото се нарича *обемна плътност на еластичната енергия*

$$(20.11) \quad w = \frac{W}{V}.$$

Заместяваме обема на пръчката $V = \ell_0 S$ и еластичната енергия $W = A = F \Delta \ell / 2$. Получаваме

$$(20.12) \quad w = \frac{F \Delta \ell}{2 S \ell_0} = \frac{1}{2} t \epsilon = \frac{t^2}{2E},$$

където при преобразуването е използван законът на Хук (20.6)

При деформация на свиване се получава аналогична формула за плътността на еластичната енергия

$$(20.13) \quad w = \frac{p^2}{2E},$$

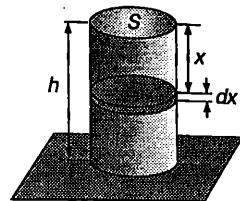
където p е налягането.

Пример 20.1. Гумен цилиндър с маса m , височина h , напречно сечение S и модул на Юнг E е поставен върху хоризонтална равнина.

а) Да се определи енергията на еластичната деформация на цилиндъра, възникнала под действие на собственото му тегло.

б) Колко пъти ще нарасне еластичната енергия на цилиндъра, ако върху него се постави втори такъв цилиндър?

Решение. а) Плътността на еластичната енергия се изразява с формула (20.13). Налягането



Фиг.20-5.

p в цилиндъра е променливо – зависи от височината. Разбиваме мислено цилиндъра на тънки дискове (фиг.20-5). Плътността на енергията във всеки от тях е постоянна. Еластичната енергия на диска от фиг.20-5 е:

$$dW = w dV = \frac{p^2}{2E} S dx.$$

Налягането p в диска е

$$p = \frac{F}{S} = \frac{(mg/h)x}{S},$$

където сме отчели, че силата F , действаща върху горната повърхност на диска, е равна на теглото на частта от цилиндъра (с височина x), намираща се над тази повърхност. Заместяваме p и интегрираме

$$W = \frac{m^2 g^2}{2ESh^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{m^2 g^2 h}{6ES}.$$

б) Двама еднакви цилиндъра образуват общ цилиндър с височина $2h$ и маса $2m$. Тъй като $W \propto m^2 h$ (вж. горната формула), еластичната енергия на общия цилиндър ще бъде $W_1 = 8W$. Горният цилиндър има същата еластична енергия W , както ако се намираше върху хоризонталната равнина. Следователно еластичната енергия на долния цилиндър е $W_2 = 8W - W = 7W$, т.е. тя нараства 7 пъти.

Задачи

1. Цилиндричен гумен шнур с маса m и напречно сечение S виси, закачен на тавана. Определете относителното удължение $\Delta \ell / \ell$ на шнур под действие на собственото му тегло. Модулът на Юнг за гумата е E .

2. Еластична цилиндрична гредата с маса m , дължина ℓ и напречно сечение S се движи с ускорение с големина a , което е насочено по дължината на гредата и е еднакво за всички точки от гредата. Определете енергията на еластичната деформация, възникнала в резултат на движението с ускорение. Модулът на Юнг за материала на гредата е E .

21. Еднородни деформации

Всестранно свиване и разтягане

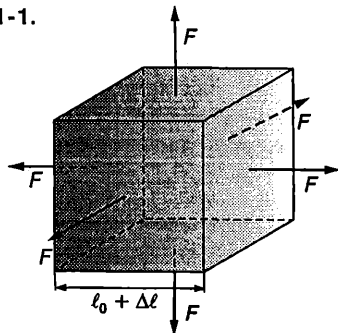
Да разгледаме куб с ребро ℓ_0 (фиг.21-1), перпендикулярно на стените на който са приложени еднакви по големина сили, стремящи се да го разтегнат (или свият). Ако силите са разпределени равномерно върху повърхността на куба, в него възникват нормални напрежения на разтягане t (или налягане p), които имат еднаква големина във всяко сечение, успоредно на някоя от стени

на куба. Да означим с $\epsilon = \frac{\Delta V}{V_0}$ относителното изменение на обема на куба (относителна обемна деформация). Опитът показва, че при малки стойности на ϵ зависимостта на напрежението от относителната обемна деформация е линейна

$$(21.1) \quad t = K \frac{\Delta V}{V_0} \quad \text{или} \quad p = -K \frac{\Delta V}{V_0}.$$

При разтягане $\Delta V > 0$, а при свиване $\Delta V < 0$. Уравненията (21.1) изразяват закона на Хук при деформации на всестранно разтягане или свиване. Те са в сила за еднородни и изотропни тела с произволна форма. Коефициентът на пропорционалност K не зависи от формата и размера на тялото и характеризира еластичните свойства на веществото. Нарича се *модул на обемна еластичност*. Обемна еластичност притежават както твърдите тела, така и течностите и газовете. Тъй като течностите и газовете нямат еластичност на формата, техните еластични свойства напълно се описват от модула на обемна еластичност.

Фиг. 21-1.



Реципрочната стойност на модула на обемна еластичност $1/K$ се нарича *коэффициент на свиваемост*. Той показва какво е относителното изменение на обема при изменение на налягането с 1 Pa

$$(21.2) \quad \frac{1}{K} = \frac{|\Delta V/V_0|}{p}.$$

Стойностите на коефициентите на свиваемост за някои течности при стайна температура са дадени в таблица 21.1.

Таблица 21.1. Коефициент на свиваемост за някои течности (Pa^{-1}).

Етер	$1,8 \cdot 10^{-9}$	Вода	$4,6 \cdot 10^{-10}$
Спирт	$1,1 \cdot 10^{-9}$	Глицерин	$2,5 \cdot 10^{-10}$
Бензол	$8,7 \cdot 10^{-10}$	Живак	$3,9 \cdot 10^{-11}$

Ще покажем, че относителното изменение на обема при всестранно разтягане (или свиване) е три пъти по-голямо от изменението на линейните размери на тялото. Действително, при увеличаване на обема на куба от фиг.21-1 с ΔV реброто му се удължава с $\Delta\ell$. Тогава

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(\ell_0 + \Delta\ell)^3 - \ell_0^3}{\ell_0^3} = 3 \frac{\Delta\ell}{\ell_0} + 3 \left(\frac{\Delta\ell}{\ell_0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\ell}{\ell_0} \right)^3.$$

Тъй като относителната деформация е малка ($\Delta\ell/\ell_0 \ll 1$), можем да пренебрегнем последните два члена в дясната страна на това равенство. Получаваме:

$$(21.3) \quad \frac{\Delta V}{V_0} \approx 3 \frac{\Delta\ell}{\ell_0}.$$

Пример 21.1. Хидростатичното налягане в най-дълбоките места на световния океан достига 1 000 атмосфери (10^8 Pa). Сравнете плътността на водата от морското дъно с тази от повърхността.

Решение. Относителното изменение на плътността ρ на водата е равно на относителното изменение на нейния обем под действие на хидростатичното налягане. Заместваме коефициента на свиваемост на водата от табл.21.1 във формула (21.2) и получаваме

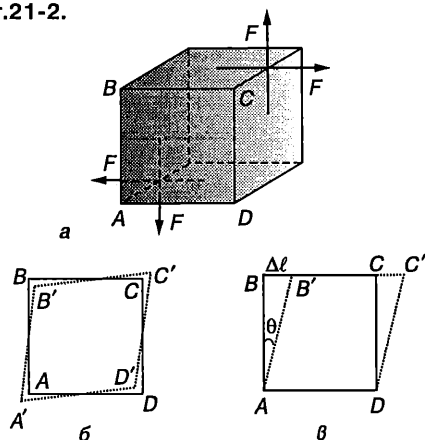
$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{|\Delta V/V_0|}{V_0} = \frac{1}{K} p = 4,6 \cdot 10^{-2} = 4,6\%.$$

Следователно при такава голяма налягане (1000 atm е хидростатичното налягане на дълбочина 10 km) плътността на водата нараства само с около 5%, което показва колко трудно свиваеми са течностите. Това се дължи на големите сили на междумолекулно взаимодействие.

Хлъзгане

Хлъзгане се нарича такава деформация на твърдо тяло, при която всички негови слоеве, успоредни на дадена равнина, без да се изкривяват или да променят размерите си, се отместват (хлъзгат) един спрямо друг. Деформация на хлъзгане претърпява например еднороден куб, към който са приложени две двойки сили (фиг.21-2а). Всички сили са равни по големина, успоредни са на съответната стена на куба и са разпределени равномерно по повърхността на стените. Общият въртящ момент на всички сили е нула, поради което кубът не се завърта или премества, а само се деформира. Опитът показва, че при деформацията обемът на куба практически не се изменя. Изменят се дължините на диагоналите AC и BD , докато изменението на дължините на ребрата на куба може да се пренебрегне, т.е. $A'D' \approx AD$ (фиг.21-2б). Затова след деформацията можем да завъртим куба така, че стената $A'D'$ да съвпада с AD (фиг.21-2в), а самата деформация да разглеждаме като хлъзгане един спрямо друг на всички слоеве, успоредни на основата AD . В резултат на хлъзгането между съседните слоеве възникват тан-

Фиг.21-2.



генциални еластични сили на взаимодействие и тангенциални еластични напрежения $\sigma_\tau = F/S$, където $S = \ell_0^2$ е площта на стената на куба. Деформацията на хлъзгане се характеризира с ъгъла θ (фиг.21-2в), наречен *ъгъл на хлъзгане*. За малки ъгли на хлъзгане (фиг.21-2в)

$$(21.4) \quad \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta \ell}{\ell_0},$$

където $\Delta \ell$ е линейното отместване на двете срещуположни стени на куба една спрямо друга, а ъгълът θ се измерва в радиани. Опитно е установено, че при малки ъгли на хлъзгане, възникващите тангенциални напрежения са линейна функция от ъгъла на хлъзгане θ

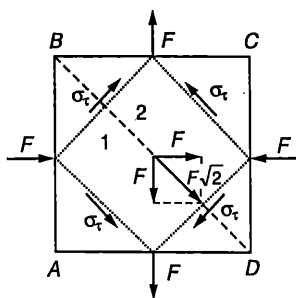
$$(21.5) \quad \sigma_\tau = G\theta.$$

Това уравнение изразява закона на Хук при деформация на хлъзгане. Коефициентът на пропорционалност G характеризира еластичните свойства на веществото и се нарича *модул на еластичност при хлъзгане*.

От фиг.21-2б се вижда, че всички слоеве, успоредни на диагонала AC на куба, са разтегнати, а успоредните на другия диагона BD слоеве се свити. Доказва се, че деформацията на хлъзгане е еквивалентна на разтягане на тялото в дадено направление и едновременно с това свиване в перпендикулярното направление. В това се убеждаваме, ако разгледаме куб, подложен едновременно на разтягане и свиване в две взаимно перпендикулярни направления (фиг.21-3). Да прекараме диагоналното сечение BD . Частта 1 от куба действа на частта 2 с еластична сила $F\sqrt{2}$, насочена успоредно на диагоналното сечение, чиято площ е $S\sqrt{2}$ (S – площта на стената на куба). Съответното тангенциално напрежение е

$$\sigma_\tau = \frac{F\sqrt{2}}{S\sqrt{2}} = \frac{F}{S} = t = p,$$

където t и p са напреженията на разтягане и налягане. Същите по големина тангенциални напрежения възникват и в другото диагонално сечение AC , както и във всяко сечение, което е успоредно на BD



Фиг.21-3.

или AC. Затова, ако мислено изрежем по-малък куб със стени, успоредни на диагоналните сечения на големия куб, останалата част от големия куб ще му действа с тангенциални еластични сили (фиг.21-3), които ще предизвикат деформация на хлъзгане.

И така, деформацията на хлъзгане може да се представи като суперпозиция на две независими деформации на разтягане и свиване, извършващи се във взаимно перпендикулярни направления. Нормалните и тангенциалните напрежения, предизвикани от тези деформации, са равни по големина.

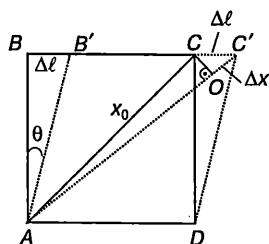
Ще докажем, че относителното удължение или скъсяване на тялото в направление на действието на силите F на опън или натиск е равно на половината от ъгъла на хлъзгане θ (слоеве, които се хлъзгат, сключват ъгъл 45° със силите F)

$$(21.6) \quad \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\theta}{2}.$$

При опъване дължината x_0 на диагонала AC нараства с Δx (фиг.21-4). За малък ъгъл на хлъзгане θ можем да приемем, че ъглите на успоредника $AB'C'D$ са приблизително равни на 90° и $x_0 = AC \approx AO$ (фиг. 21-4). Тогава:

$$\Delta \ell = \Delta x \sqrt{2}. \text{ От друга страна, } \ell_0 = \frac{x_0}{\sqrt{2}}.$$

Фиг.21-4.



Заместваме $\Delta \ell$ и ℓ_0 в уравнение (21.4) и получаваме

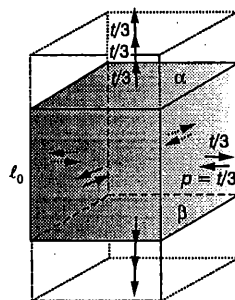
$$\theta = \frac{\Delta x \sqrt{2}}{x_0 / \sqrt{2}} = \frac{2 \Delta x}{x_0} \text{ или } \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\theta}{2}.$$

Връзка между еластичните модули

За количествена характеристика на еластичните свойства на еднородните и изотропни твърди тела са достатъчни две независими макроскопични величини. Удобно е за такива да се изберат модулет на Юнг E и модулет на еластичност при хлъзгане G , които най-лесно се определят експериментално. Ще докажем, че модулет на обемна еластичност K и коефициентът на Поасон μ могат да се изразят чрез еластичните модули E и G . За целта ще разгледаме еднородна разтегната пръчка, чието напречно сечение е квадрат. Нека α и β са две напречни сечения (фиг.21-5), които отделят от пръчката куб с ребро ℓ_0 . Останалата част от пръчката действа на двете срещуположни стени на куба с напрежения на опъване t и предизвиква деформация на разтягане, която се определя от закона на Хук $\frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{t}{E}$. Да разло-

жим напрежението t на три еднакви напрежения $t/3$. Нека освен това мислено да приложим към останалите стени на куба напрежение на опъване $t/3$ и едновременно с това същото по големина налягане $p = t/3$ (фиг.21-5). При това действителното състояние на деформация на пръчката не се изменя, тъй като двете равни по големина напрежения (на опъване и налягане) имат противоположно действие и вза-

Фиг.21-5.



имно се компенсират. Използваният подход обаче ни дава възможност да представим действителната деформация на пръчката като суперпозиция от три независими однородни деформации:

1. Всестранно разтягане под действие на напрежението $t/3$, приложено към цялата повърхност на пръчката (фиг.21-5). От уравнения (21.1) и (21.3) следва, че относителното удължаване на пръчката в резултат на всестранното разтягане е

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3\Delta\ell_1}{\ell_0} = \frac{t}{3K} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\ell_1}{\ell_0} = \frac{t}{9K}.$$

2. Напреженията на опъване $t/3$ в сеченията α и β и налягането $p = t/3$ върху лявата и дясната стена на куба предизвикват деформация на хлъзгане (вж. фиг.21-3). Както вече беше отбелязано, хлъзгащите се един спрямо друг слоеве сключват ъгъл 45° с направлението на силите на опъване и налягане. Относителното удължение на пръчката в направление на опъващите сили се изразява с формула (21.6), в която ще заместим ъгъла на хлъзгане θ от закона на Хук (21.5) за деформация на хлъзгане

$$\frac{\Delta\ell_2}{\ell_0} = \frac{\theta}{2} = \frac{t}{6G}.$$

Същата по големина относителна деформация, само че на напречно свиване, възниква в направление на силите на налягане, действащи върху лявата и дясната стена на куба.

3. Аналогична деформация на хлъзгане ще предизвикат оставащата една трета от напрежението на надлъжно разтягане на пръчката и налягането върху предната и задната стена на куба. В резултат на това хлъзгане пръчката ще получи още едно относително удължение $t/6G$ в надлъжно направление и същото по големина напречно свиване от предната към задната стена.

И така, пълната относителна деформация на разтягане на пръчката е

$$\frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{t}{9K} + \frac{t}{6G} + \frac{t}{6G} = \frac{t}{E},$$

откъдето получаваме

$$(21.7) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}.$$

Големината на действителното относително свиване в напречно направление ще получим, като от големината на относителното свиване $t/6G$ извадим относителното удължаване $t/9K$ при всестранното разтягане. Относителното изменение на напречния размер (на дължините на страните $D_0 = \ell_0$ на квадратните напречни сечения α и β на пръчката) е

$$\left| \frac{\Delta D}{D_0} \right| = \frac{t}{6G} - \frac{t}{9K} = \frac{\mu t}{E},$$

където сме отчели уравнения (20.6) и (20.7).

След съкръщаване на t получаваме

$$(21.8) \quad \frac{\mu}{E} = \frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}.$$

Уравнения (21.7) и (21.8) дават връзката между еластичните модули. От (21.7) непосредствено се определя модулет на обемна еластичност K (или коефициентът на свиваемост $1/K$), ако са известни модулет на Юнг E и модулет на хлъзгане G . От двете уравнения се изразява коефициентът на Поасон

$$(21.9) \quad \mu = \frac{E}{2G} - 1.$$

Едностранно разтягане и свиване

В §20 разгледахме разтягането и свиването на пръчка, върху околната повърхност на която не са приложени никакви сили. При разтягане напречното сечение на пръчката намалява, а при свиване – нараства. Нека сега да предположим, че пръчката се разтяга или свива в условия, които не позволяват да се изменят нейните напречни размери. Такава деформация се нарича деформация на едностранно разтягане (или свиване). Законът на Хук в този случай се изразява с уравненията

$$(21.10) \quad t = E' \frac{\Delta\ell}{\ell_0}; \quad p = -E' \frac{\Delta\ell}{\ell_0}.$$

Първото уравнение описва едностранното разтягане, а второто – едностранното свиване. Коефициентът на пропорционалност E' характеризира еластичните свойства на веществото и се нарича мо-

дул на еластичност при едностранно свиване (разтягане). Той също се изразява чрез останалите еластични модули. На пример може да се докаже, че

$$(21.11) \quad E' = K + \frac{4}{3} G.$$

От еластичния модул E' зависи скоростта, с която се разпространяват надлъжните механични вълни в неограничена твърда среда. Ако мислено изрежем от средата дълъг цилиндричен слой, чиято ос съвпада с посоката на разпространение на вълната, вълновият процес ще се изразява в периодично едностранно свиване и разтягане на слоя, тъй като околната среда възпрепятства изменението на напречните му размери.

Еластична енергия

Всички разгледани досега еластични деформации са еднородни. Това означава, че напреженията и обемната плътност на енергията във всеки произволно избран елемент от тялото са еднакви. Доказва се, че обемната плътност на енергията се изразява с аналогични на (20.12) и (20.13) формули, които изведохме за случая на разтегната или свита пръчка. Необходимо е само модулът на Юнг E да се замени с еластичния модул, характеризиращ съответния вид еднородна деформация. Например обемната плътност на енергията при деформация на всестранно разтягане или свиване се изразява съответно с формулите

$$(21.12) \quad w = \frac{t^2}{2K}; \quad w = \frac{p^2}{2K}.$$

Обемната плътност на енергията при деформация на хлъзгане е

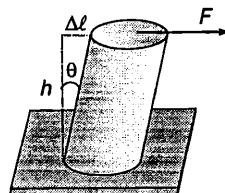
$$(21.13) \quad w = \frac{\sigma_\tau^2}{2G}.$$

Задачи

1. Плътно оловно кълбо с обем $V_0 = 0,01 \text{ m}^3$ е потопено на дъното на океана, където налягането е $2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$. Определете изменението на обема ΔV на кълбото. Еластичният модул на всестранно свиване за оловото е $K = 7,7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

2. Плътен меден куб с ръб $\ell_0 = 112 \text{ mm}$ се подлага на всестранно свиване. При какво налягане p дължината на реброто му става $\ell = 111 \text{ mm}$? Модулът на еластичност при всестранно свиване за медта е $K = 1,4 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

3. Долната основа на алуминиев цилиндър с диаметър $d = 10 \text{ cm}$ и височина $h = 20 \text{ cm}$ е закрепена неподвижно, а към горната основа е приложена тангенциална сила $F = 10 \text{ kN}$ (фиг.21-6). Определете:



Фиг.21-6.

а) тангенциалното напрежение σ_τ в материала на цилиндъра;

б) ъгълът на хлъзгане θ ;

в) еластичната енергия W на деформация на цилиндъра.

Модулът на хлъзгане за алуминия е $G = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.

4. Метален детайл, направен от материал с модул на Юнг E и модул на хлъзгане G , е подложен на всестранно свиване под действие на външно налягане p . Определете относителното изменение на обема на детайла.

5. Като използвате уравнения (21.8), (21.9) и (21.11) изразете еластичния модул на едностранно разтягане E' чрез модула на Юнг E и модула на хлъзгане G .

6. Докажете, че стойността на коефициента на Поасон за всички материали е по-малка от 0,5 ($\mu < 0,5$).

Указание. Изразете плътността на еластичната енергия при деформация на едностранно свиване $w = p^2/2E'$ чрез модула на Юнг E и коефициента на Поасон μ .

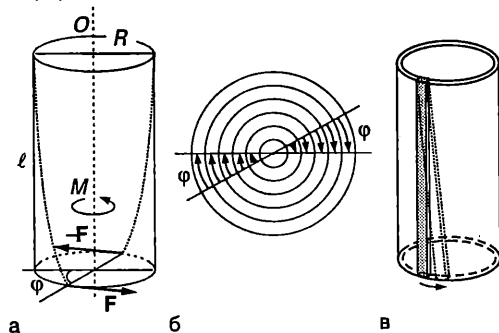
22. Неоднородни деформации

Освен разгледаните в §20 и §21 еднородни деформации, в еднородните изотропни твърди тела възникват и неоднородни деформации, при които едни части от тялото са по-силно деформирани, а други части – по-слабо деформирани. Такива са деформациите на усукване и огъване, на които ще се спрем сега.

Усукване

Ще разгледаме еднороден цилиндър с дължина ℓ и радиус R , едната основа на който е закрепена неподвижно. Към другата основа е приложена двойка сили, която създава въртящ момент M , насочен по оста O на цилиндъра (фиг.22-1а). Когато деформацията, предизвикана от двойката сили, не е много голяма, всяка радиална линия от долната основа, без да се изкривява, само се завърта на ъгъл φ около оста O (фиг.22-1б). Аналогично завъртане извършват радиалните линии от всички напречни сечения на цилиндъра, като ъгълът на завъртане линейно нараства при увеличаване на разстоянието от даденото сечение до неподвижната основа. В резултат на тези завъртания, всяка линия от околната повърхност на цилиндъра, която първоначално е била успоредна на оста O , се изкривява – цилиндърът се усуква

Фиг.22-1. Усукване: а) линиите, които са били успоредни на оста O на цилиндъра, се изкривяват; б) външните слоеве от цилиндъра са по-силно деформирани от вътрешните слоеве; в) всеки малък елемент от цилиндъра (сивият паралелепипед от фигурата) е подложен на деформация на хлъзгане.



(фиг.22-1а). Усукването може да се разглежда като деформация на неоднородно хлъзгане. Нека мислено разделим плътния цилиндър на голям брой тънки цилиндрични слоеве и да разгледаме малък елемент от такъв един слой (фиг.22-1в). При усукването на цилиндъра елементът претърпява деформация на хлъзгане. Колкото по-външен е цилиндричният слой, толкова по-голяма е деформацията му (фиг.22-1б). Опитът и теорията доказват, че ъгълът на усукване φ е право пропорционален на големината M на приложения към цилиндъра въртящ момент и се изразява с формулата

$$(22.1) \quad \varphi = \frac{M\ell}{G I_n},$$

където ℓ е дължината на цилиндъра, G е модулът на еластичност при хлъзгане за материала, от който той е направен. I_n е геометричен фактор, наречен *полярен инерчен момент*, зависещ единствено от размерите и формата на подложеното на деформация на усукване тяло. Размерността на I_n е m^4 (метър на четвърта степен). Например полярният инерчен момент на плътен цилиндър с радиус R е

$$(22.2) \quad I_n = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Уравнение (22.1) се записва във вида

$$(22.3) \quad M = f\varphi.$$

Величината

$$(22.4) \quad f = \frac{G I_n}{\ell}$$

се нарича *модул на усукване*. Модулът на усукване зависи както от еластичните свойства на веществото (посредством еластичния модул на хлъзгане G), така и от размерите и формата на твърдото тяло (от полярният инерчен момент I_n , а за цилиндрично тяло, например еластична нишка, и от дължината ℓ на цилиндъра).

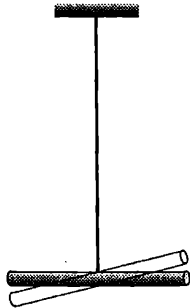
Пример 22.1. Модулът на еластичност при хлъзгане G може да се определи, ако се измери периодът на торзионно махало. Торзионното махало представлява еластична нишка, на която е закачено тежко тяло. След усукване на нишката, под действие на еластичните сили,

тялото започва да трепти с

$$\text{период } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}},$$

където I е инерчният момент на тялото спрямо оста на въртене (ос на нишката), а f е модулет на усукване за нишката.

За торзионно махало е използвана стоманена нишка с дължина $\ell = 50$ cm и радиус $R = 0,2$ mm. На нея е закачена тънка пръчка с маса $m = 50$ g и дължина $L = 15$ cm (фиг.22-2).



Фиг.22-2.

Определете модула на еластичност при хлъзгане G за стоманата, ако периодът на махалото е $T = 2,96$ s.

Решение. От уравнения (22.4) и (22.2) изразяваме модула на усукване за нишката

$$f = \frac{\pi GR^4}{2\ell}.$$

Изразяваме също така f от формулата за периода на торзионното махало

$$f = \frac{4\pi^2 I}{T^2}.$$

Приравняваме десните страни на двете равенства, заместваме инерчния момент на пръчката $I = mL^2/12$ и определяме модула на хлъзгане G за стоманата

$$G = \frac{2\pi m \ell L^2}{3T^2 R^4} = \frac{2\pi(0,05 \text{ kg})(0,5 \text{ m})(0,15 \text{ m})^2}{3(2,96 \text{ s})^2(0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4} = 8,4 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Огъване

Да разгледаме еднородна пръчка с дължина ℓ , към двата края на която са приложени външни сили с еднакви по големина и противоположни по посока въртящи моменти M (фиг.22-3а). Под тяхно действие пръчката се огъва – горната ѝ част се свива, а долната ѝ част се разтяга. Повърхността, прекарана през средата на пръчката, не е деформирана. Тя разделя разтегнатата и свитата част и се нарича *неутрална повърхност*. Надлъжната ос на пръчката, която преминава през центъра на масите на всички напречни сечения, лежи върху неутралната повърхност. На-

рича се *неутрална ос*. Във всяко напречно сечение възникват еластични сили на взаимодействие: над неутралната повърхност това са сили на натиск, а под нея – на опън (фиг.22-3а). Деформацията се нарича *чисто огъване*, ако резултантната от силите на опън е равна по големина на резултантната на силите на натиск. Тогава те образуват двойка сили, която създава въртящ момент, равен по големина на въртящия момент на външните сили, предизвикващи огъването.

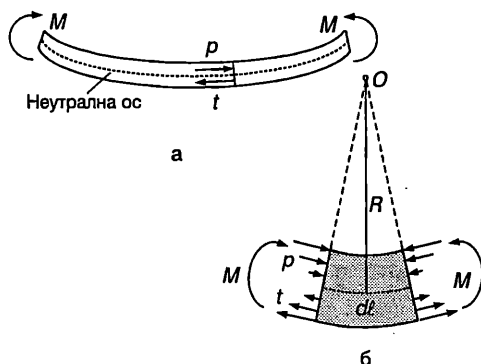
Нека мислено отделим малък елемент от пръчката с дължина $d\ell$ (фиг.22-3б). При чисто огъване напречните сечения, отделящи елемента $d\ell$, остават плоски, като се наклоняват едно спрямо друго. Доказва се, че големината на нормалните напрежения σ_n , с които останалите части на пръчката действат върху елемента $d\ell$, са право пропорционални на големината на приложения въртящ момент M и нарастват линейно с разстоянието s до неутралната повърхност

$$(22.5) \quad \sigma_n = \frac{M}{I_n} s,$$

където I_n е геометричен фактор, който зависи от формата и размерите на напречното сечение на пръчката. Измерва се в единици m^4 (метър на четвърта степен) и се нарича *инерчен момент на напречното сечение*.

И така, чистото огъване може да се разглежда като нееднородна деформация на свиване и разтягане. Всички влакна, успоредни на неутралната повърхност и намиращи се над нея, са свити. Колкото

Фиг.22-3. Огъване на пръчка.



по-голямо е разстоянието s от влакното до неутралната повърхност, толкова по-голямо е налягането ($\sigma_n = p$). Аналогично, напрежението на опъване ($\sigma_n = t$) е максимално за влакната от долната повърхност на пръчката.

При огъване неутралната ос на елемента $d\ell$ се изкривява. По аналогичен начин се изкривяват неутралните оси на останалите елементи от пръчката – във всяка точка неутралната ос на огъната пръчка се характеризира с определен радиус на кривината R .

Доказва се, че големината на въртящият момент M на еластичните сили в дадено напречно сечение на огъната пръчка е обратнопропорционален на радиуса на кривината на неутралната ос в това сечение

$$(22.6) \quad M = \frac{EI_n}{R},$$

където I_n е инерчният момент на напречното сечение, а E е модулът на Юнг за материала на пръчката.

Да изберем началото O на правоъгълна координатна система в единия край на пръчката, а оста x да съвпада с неутралната ос преди огъването. След огъването различните точки от неутралната линия се намират на различни разстояния y от оста x . Ако е известна функцията $y(x)$, задаваща аналитично неутралната линия след огъването, радиусът на кривината в точка с координата x се изразява с известната от аналитичната геометрия формула

$$(22.7) \quad \frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}.$$

При $dy/dx \ll 1$, т.е. когато пръчката е само малко огъната, знаменателят на уравнение (22.7) е приблизително равен на единица. Тогава

$$(22.8) \quad \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Заместваме радиуса на кривината R от уравнение (22.6) в (22.8) и получаваме диференциално уравнение за деформацията на огъване y

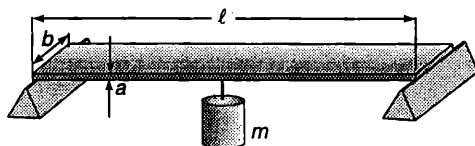
(22.9)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_n},$$

което се решава чрез непосредствено интегриране при отчитане на съответните гранични условия.

Пример 22.2. За да се определи модулът на Юнг за стоманата, направен е следният опит: Стоманена пластинка с дължина $\ell = 40$ cm, ширина $b = 1,5$ cm и дебелина $a = 1,5$ mm е подпряна в двата ѝ края, както е показано на фиг.22-4. Към средата C на пластинката е закачена теглилка с маса $m = 1$ kg, която предизвиква деформация на огъване. Пресметнете модула на Юнг за стоманата, ако деформацията на огъване за средната точка C е $y_0 = 15,5$ mm.

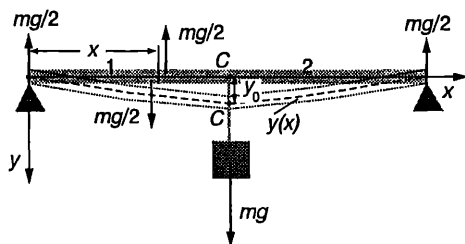
Инерчният момент на напречното сечение на пластинката е $I_n = a^3b/12$. Масата на пластинката се пренебрегва.



Фиг.22-4.

Решение. Поради симетрията, силите на реакция в двете опори са равни по големина. Тъй като тяхната сума уравнирява теглото mg на теглилката (фиг.22-5), следва изводът, че всяка една от двете сили на реакция има големина $mg/2$. Да разгледаме напречно сечение, разположено на разстояние x от единия край на пластинката. От условието за равновесие на лявата част 1 на пластинката следва, че дясната част ѝ действа с вертикална сила $mg/2$. Двете равни по големина и противоположни по посока сили $mg/2$, приложени на частта 1, образуват двойка сили с въртящ момент $(mg/2)x$, който уравнирява въртящия

Фиг.22-5.



момент M на еластичните сили, с които част 2 действа на част 1: $M = mgx/2$. Заместваме M в уравнение (22.9) и получаваме

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{mgx}{2EI_H},$$

където със знака минус сме отчели, че втората производна на y по x е отрицателна (оста y е насочена към изпълналата страна на кривата $y(x)$).

Интегрираме веднъж полученото диференциално уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{mgx^2}{4EI_H} + C_1.$$

Константата C_1 определяме от граничното условие $dy/dx = 0$ при $x = \ell/2$ (от симетрията следва, че допирателната към средната точка C е успоредна на оста x , т.е. първата производна по x в тази точка е нула). След заместване определяме $C_1 = \frac{mg\ell^2}{16EI_H}$. Заместваме C_1 ,

интегрираме втори път и определяме огъването (провисването) y на пластинката

$$y = -\frac{mgx^3}{12EI_H} + \frac{mg\ell^2}{16EI_H}x + C_2.$$

От граничното условие $y = 0$ при $x = 0$ (краят на пластинката остава неподвижен) определяме константата C_2 : $C_2 = 0$. Полагаме $x = \ell/2$ и определяме огъването y_0 за средната точка C

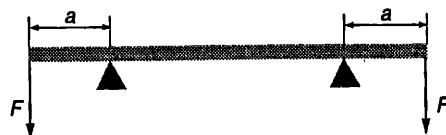
$$y_0 = \frac{mg\ell^3}{48EI_H} = \frac{mg\ell^3}{4Ea^3b},$$

където сме заместили инерчния момент I_H на напречното сечение на пластинката. От полученото равенство пресмятаме модула на Юнг

$$E = \frac{mg\ell^3}{4y_0a^3b} = \frac{(1 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(0,4 \text{ m})^3}{4(15,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})(1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^3(0,015 \text{ m})} = 2,10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Задачи

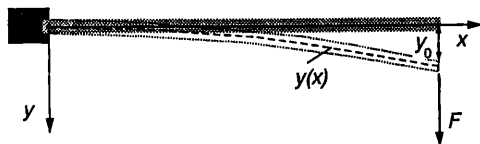
1. Еднородна пръчка АВ лежи върху две опори, разположени симетрично на разстояние a от двата края на пръчката (фиг.22-6). Към краищата A и B са приложени две еднакви сили с големина F , насочени перпендикулярно на пръчката. Под действие на тези две сили и на силите на реакция на двете опори пръчката се



Фиг.22-6.

огъва. Докажете, че неутралната линия на огънатата пръчка е дъга от окръжност и изразете радиуса на тази окръжност R чрез големината на силите F , разстоянието a , модула на Юнг E за материала на пръчката и инерчния момент на нейното напречно сечение I_H . Теглото на пръчката се пренебрегва.

2. Определете огъването y_0 на свободния край на пластинка, единият край на която е неподвижно закрепен в стена, а на другия (свободния) край действа сила с големина F (фиг.22-7). Дължината на пластинката е ℓ , инерчният момент на напречното ѝ сечение е I_H . Модулът на Юнг за материала на пластинката е E . Теглото на пластинката се пренебрегва.

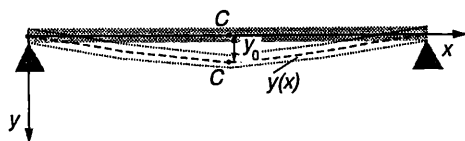


Фиг.22-7.

*3. Еднородна пластинка с маса m , дължина ℓ , ширина b и дебелина a е подпряна в двата ѝ края на две хоризонтални опори (фиг.22-8). Пластинката се огъва под действие на собственото си тегло. Изразете огъването y на неутралната линия на пластинката, като функция на разстоянието x до единия ѝ край: $y(x)$. Определете разстоянието y_0 , на което се спуска надолу центърът на масите C на пластинката в резултат на огъването.

Инерчният момент на напречното сечение на пластинката е $I = a^3b/12$. Модулът на Юнг за материала на пластинката е E .

Фиг.22-8.



23. Еластични свойства на биологичните материали

Под действие на различни външни сили биологичните материали се деформират и в тях възникват напрежения. Например при порив на вятъра стеблата на дърветата се огъват, при движение на животните костите на техните крайници се свиват, разтягат, усукват или огъват. Когато външна сила F предизвиква еднородна деформация на свиване, разтягане или хлъзгане, механичното напрежение, което възниква в дадения биологичен материал, зависи единствено от напречното сечение S на обекта, върху който е приложена силата ($\sigma = F/S$). При огъване или усукване обаче възникват нееднородни деформации и напрежения, които зависят не само от напречното сечение, но и от формата и размерите на обекта. Ще се спрем накратко на условията за устойчивост на механичните конструкции срещу различни деформации и как тези условия са спазени в структурата на биологичните обекти.

Устойчивост срещу огъване и усукване

Деформациите на усукване и огъване, както и всички останали деформации, са еластични само в определени граници. Когато ъгълът на усукване φ или кривината $1/R$ на неутралната линия при огъване надминат някаква определена стойност, деформациите стават пластични и може да се предизвика счупване или разрушаване на обекта. Съгласно с уравнения (22.1) и (22.6)

$$(23.1) \quad \varphi = \frac{M\ell}{GI_n};$$

$$(23.2) \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{EI_n},$$

т.е. при определена стойност на приложения въртящ момент M ъгълът на усукване φ и кривината $1/R$ на неутралната линия при огъване зависят не само от еластичните модули G (или E), но и от геометрични фактори, каквито са полярният инерчен момент I_n и инерчният момент на напречното сечение I_n . Величините I_n и I_n за симетрични тела могат да се пресметнат

теоретично. Техните стойности за пластинка и за цилиндър са дадени в таблица 23.1.

Таблица 23.1. Полярни инерчни моменти I_n и инерчни моменти на напречното сечение I_n за някои симетрични тела.

	$I_n = \alpha a^3 b,$ където коефициентът α зависи от отношението b/a. Например при $b/a > 10$, $\alpha \approx 1/3$.
 Плътен цилиндър	$I_n = \frac{1}{12} a^3 b.$ $I_n = \frac{\pi r^4}{2};$ $I_n = \frac{\pi r^4}{4}.$
 Кух цилиндър	$I_n = \frac{\pi}{2} (r^4 - r_1^4);$ $I_n = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4).$

Колкото по-големи са инерчните моменти I_n и I_n , толкова по-устойчива срещу усукване или огъване е дадена конструкция. Това се демонстрира от следния пример:

Пример 23.1. Бедрената кост на човека с приближение може да се приеме за кух цилиндър с външен радиус r и вътрешен радиус $r/2$. Ако към двата края на костта се приложат равни по големина и противоположни по посока въртящи моменти M , костта се усуква на ъгъл φ . На какъв ъгъл би се усукала при същите условия плътна цилиндрична кост със същата дължина и маса?

Ако същите по големина въртящи моменти предизвикват огъване, сравнете кривините на неутралните оси за кухата и плътната кост.

Решение. От формула (23.1) следва, че ъгълът на усукване φ за плътната кост е толкова пъти по-голям, колкото пъти е по-малък полярният инерчният момент I_n на плътния цилиндър:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{I_n}{I_{n1}}.$$

Радиусът r_1 на плътната кост определяме от условието, че двете кости имат еднаква дължина ℓ и еднаква маса m

$$m = \rho \pi r_1^2 \ell \quad \text{и} \quad m = \rho \pi \left(r^2 - \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right) \ell,$$

където ρ е плътността на костното вещество. Приравняваме десните страни на двете равенства за масата m на цилиндрите и получаваме

$$r_1^2 = \frac{3}{4} r^2.$$

Двата полярни инерчни момента са (вж. табл.23.1)

$$I_n = \frac{1}{2} \pi \left(r^4 - \left(\frac{r}{2} \right)^4 \right) = \frac{15}{32} \pi r^4;$$

$$I_{n1} = \frac{1}{2} \pi r_1^4 = \frac{9}{32} \pi r^4.$$

Търсеното отношение е:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{I_n}{I_{n1}} = \frac{15}{9} \approx 1,7.$$

Следователно плътна кост със същата маса и дължина би се усукала на 1,7 пъти по-голям ъгъл. За да се усукат двете кости на един и същ ъгъл, към кухата кост трябва да се приложи 1,7 пъти по-голям въртящ момент.

Тъй като зависимостта на инерчните моменти на напречното сечение от радиусите за кух и за пълен цилиндър е същата, както при полярните инерчни моменти (вж. табл.23.1), полученният резултат за ъглите на усукване е в сила и за кривините на неутралните оси при огъване: по-силно ще се огъне плътната кост.

Напречното сечение на плътните части на двете кости е еднакво (имат еднакви маси и дължини), поради което равни по големина сили биха предизвикали еднакви деформации на разтягане или свиване. Деформациите на огъване и усукване обаче са различни.

От разгледания пример може да се направи изводът, че за постигане на лека и здрава конструкция, устойчива срещу деформации на усукване и огъване, гравитният материал трябва да се разположи колкото е възможно подалеч от оста на усукване или от неутралната ос при огъване. Фактът, че при еднаква маса и дължина кухите конструкции са по-устойчиви на усукване и огъване от плътните, намира своето отражение при еволюцията на живите организми. Костите на бозайниците и птиците са кухи. Особено тънки са стените на костите на някои птици и дребни бозайници. Например вътрешният радиус на раменната кост на лебеда е равен на 90% от външния радиус.

Критична височина на дърветата

Да разгледаме плътна еднородна цилиндрична колона с височина ℓ и радиус r , която е поставена вертикално. Долният край на колоната е зазидан в хоризонталната опора. Да предположим, че под външно въздействие колоната е огъната под формата на дъга с радиус R (фиг.23-1). При огъването еластичните сили създават в основата на колоната въртящ момент

$$M = \frac{E I_n}{R} = \frac{E \pi r^4}{4R},$$

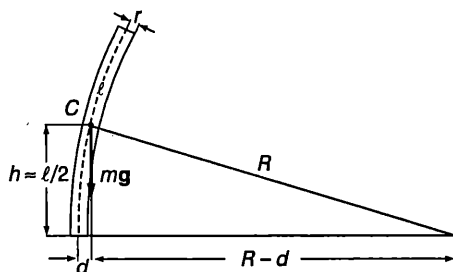
който се стреми да я изправи. ($I_n = \pi r^4/2$ е инерчният момент на напречното сечение на колоната.) От друга страна, силата на тежестта mg създава въртящ момент mgd спрямо хоризонталната ос O , стремящ се още по-силно да огъне колоната. Ако въртящият момент на еластичните сили е по-голям – колоната ще се изправи, в противен случай тя ще продължи да се огъва и ще се пречупи. Критичен е случаят, когато двата въртящи момента са равни

$$\frac{E \pi r^4}{4R} = mgd.$$

Когато огъването е малко ($R \gg \ell$), центърът на тежестта на огънатата колона се намира на височина $h \approx \ell/2$. Тогава с помощта на питагоровата теорема от правоъгълния триъгълник на фиг.23-1 определяме рамото d на силата на тежестта: $R^2 = (\ell/2)^2 + (R - d)^2$. Пренебрегваме d^2 и получаваме: $d = \ell^2/8R$.

Масата на цилиндъра е $m = \pi r^2 \ell \rho$, където ρ е плътността на материала. Заместяваме m и d в равенството на моментите и определяме критичната височина на ко-

Фиг.23-1.



$$(23.3) \quad \ell_{\text{крит.}} = \left(\frac{2E}{g\rho} \right)^{\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}}.$$

Колона с дължина по-голяма от критичната дължина $\ell_{\text{крит.}}$ е неустойчива срещу огъване. Ако външна сила, например порив на вятъра, предизвика някакво огъване на колоната, след това тя ще продължи да се огъва под действие на собствената си тежест (на въртящия момент на силата на тежестта). Еластичните сили не могат да спрат това огъване и колоната ще се пречупи. Например за дърво модулът на Юнг E е около 1.10^{10} N/m^2 , а плътността ρ е около 1000 kg/m^3 . Критичната дължина на дървена колона е

$$\ell_{\text{крит.}} = 126r^{\frac{2}{3}},$$

където радиусът r и височината ℓ на колоната се измерват в метри. Например при $r = 0,1 \text{ m}$ критичната височина е $\ell_{\text{крит.}} = 27 \text{ m}$, т.е. за да не се пречупи от собствената си тежест, вертикална дървена колона с радиус 10 cm трябва да има височина по-малка от 27 m .

Аналогична на уравнение (23.3) зависимост

$$(23.4) \quad \ell_{\text{крит.}} = Cr^{\frac{2}{3}}$$

е в сила за кухи колони, за колони с форма на пресечен конус, както и за колони, които носят товар, само че в различните случаи коефициентът на пропорционалност C има различни стойности.

Установено е, че опасността от пречупване при огъване е лимитиращ фактор, определящ пропорциите в размерите на някои растителни и животински видове. Изследванията на стеблата на различни видове дървета показват, че между радиусът r и височината ℓ на стеблото има зависимост, която с приближение се описва от уравнение (23.4). Най-добро съвпадение с измерванията за много голям брой дървета в Северна Америка е получено при стойност на коефициента на пропорционалност $C = 35 \text{ m}^{1/3}$.

Метод на подобието

В §12 използвахме най-елементарен вариант на метода на подобието, за да получим зависимостта на механичната мощност и скоростта на метаболизма (на обмяна на веществата) при бозайниците от тяхната маса m . Според елементарния модел, обемът на всички органи на бозайника са пропорционални на някакъв характерен размер ℓ , а техните повърхности са пропорционални на ℓ^2 . В действителност обаче редица части на тялото имат цилиндрична форма и, както показват изследванията, връзката между техния радиус r и дължина ℓ приблизително съответства на условието за устойчивост срещу огъване, което се изразява с формула (23.4), т.е. $\ell \propto r^{2/3}$. Да разгледаме например цилиндричен мускул, чиито радиус r и дължина ℓ са свързани с това съотношение. Тогава масата на мускула, която е право пропорционална на обема на цилиндъра, е:

$$m \propto \ell r^2 \propto \left(r^{\frac{2}{3}} \right) r^2 = r^{\frac{8}{3}} \quad \text{или} \quad r \propto m^{\frac{3}{8}}.$$

Напречното сечение на мускула е $S \propto r^2$. Механичната мощност при съкращаване на мускула е $P = Fv$, където F е мускулната сила, а v е скоростта, с която става съкращаването. Мускулната сила е $F = \sigma S$, където σ е механичното напрежение, което възниква при съкращаване на мускула. Следователно $P = (\sigma v) S$. Изследванията показват, че при различните бозайници стойностите на σ и v са приблизително еднакви, т.е. механичната мощност е право пропорционална на напречното сечение на мускула: $P \propto S \propto r^2$. След като отчетем връзката между масата m и радиуса r , получаваме

$$P \propto m^{\frac{3}{4}}.$$

Ако предположим същата зависимост за топлинната мощност, отделена в резултат на обмяната (метаболизма), ще получим правилната числена стойност $3/4$ на степения показател в закона на Клайбер (12.2) на стр.74.

По аналогичен начин може да се определи как честотата ν на пулса зависи от масата m на бозайника. Скоростта на

метаболизма, както и необходимото за целта количество кислород, са пропорционални на $m^{3/4}$. Масата на кръвта, която се изтласква от сърцето за един удар, е пропорционална на общата маса на кръвта, която от своя страна е пропорционална на масата m на бозайника. Масата на изтласканата за една секунда кръв е пропорционална на vm и определя необходимото количество кислород, което трябва да постъпва в клетките за една секунда. Следователно $vm \propto m^{3/4}$, откъдето определяме:

$$v \propto m^{-1/4},$$

т.е. едрите бозайници имат по-малка честота на пулса. Например, ако масите на два бозайника се различават 16 пъти, поголемият ще има 2 пъти по бавен пулс. Експерименталните изследвания показват, че действително съществува подобна зависимост на честотата на пулса от масата на бозайниците.

Задачи

1. Две кости с еднакъв диаметър, но с различна дължина, се усукват под действие на сили с еднакви въртящи моменти. Едната кост се счупва, а другата остава здрава. Обяснете защо.
2. Два цилиндъра имат еднакви дължини и маси и са направени от един и същ материал. Радиусът r на плътния цилиндър е равен на вътрешния радиус r_1 на кухия цилиндър. Определете отношението ϕ_1/ϕ на ъгъла на усукване ϕ_1 на кухия цилиндър към ъгъла на усукване ϕ на плътния цилиндър, когато към двата цилиндъра са приложени сили с еднакви въртящи моменти.

3. Критичната височина за колона с радиус $r = 5$ cm е 7 m. Колко сантиметра трябва да е минималният радиус на колона с височина 20 m, направена от същия материал, за да бъде колоната устойчива при огъване?

4. Експериментално е установено, че критичната височина на определен вид дървета се изразява с формула (23.4), $\ell_{\text{крит.}} = Cr^{\frac{2}{3}}$, където $C = 35 \text{ m}^{1/3}$. Пресметнете критичната височина на дърво с радиус $r = 1/8$ m.

5. Две плътни колони с радиуси $r_1 = r$ и $r_2 = 3r$ са направени от един и същ материал. Определете отношението ℓ_2/ℓ_1 на височините на двете колони, ако е известно, че височината на всяка колона е два пъти по-малка от критичната височина.

6. Като използвате метода на подобие и направите подобни предположения, както при извода на закона на Клайбер на стр. 127, определете как топлинните загуби Q в околната среда зависят от масата m на бозайниците. Съгласува ли се полученият от вас резултат с факта, че в полярните области обикновено не се срещат малки животни?

7. Да предположим, че между дължината ℓ и радиуса r на костите съществува зависимостта $\ell \propto r^{2/3}$, която се запазва при израстването на децата. Ако ъгълът на усукване, при който костта се счупва, е еднакъв за децата и възрастните, определете дали децата или възрастните са по-устойчиви срещу счупвания, предизвикани от сили на усукване. Разгледайте два случая:

- а) въртящите моменти M на силите, предизвикващи усукването, са равни по големина;
- б) въртящите моменти M на силите, предизвикващи усукването, са пропорционални на радиуса r на костите и на теглото на човека mg .

Механика на флуидите



Механиката на флуидите изучава равновесието и движението на течностите и газовете и тяхното взаимодействие с твърдите тела. За разлика от твърдите тела, в условие на равновесие в течностите и газовете не възникват тангенциални напрежения: те не притежават еластичност на формата, поради което могат да текат. Флуидите имат само обемна еластичност – отделните им части взаимодействат със сили на натиск. За разлика от газовете, които се разширяват неограничено и изпълват целия предоставен им обем, течностите имат собствен обем и са слабо свиваеми. В много случаи изменението на обема на течността може да се пренебрегне и тя да се смята за несвиваема. Равновесието на несвиваемите течности се изучава от хидростатиката, а тяхното движение – от хидродинамиката. Аеродинамиката изучава движението на свиваемите флуиди (главно на газовете, включително на въздуха). Между два съседни слоя от флуида, които се движат с различни скорости, възникват сили на вътрешно триене. Такива флуиди се наричат вискозни. Когато силите на вътрешно триене могат да се пренебрегнат, флуидът е идеален. В тази глава най-напред ще се спрем на някои от основните закономерности в хидростатиката. След това ще разгледаме движението на идеалните и на вискозните флуиди и условията, при които потокът на вискозен флуид от ламинарен преминава в турбулентен. Ще засегнем основните принципи на летенето и приложението на хидродинамиката при изучаване на кръвоносната система на човека и животните.

24. Хидростатика

Закон на Паскал

Силите, които действат на всеки елемент от флуид, могат да се разделят на две групи: масови (обемни) сили и повърхнинни сили. Масовите сили са разпределени в целия обем на разглеждания елемент от флуида и са право пропорционални на неговата маса (масови са силата на тежестта и инерчните сили). Повърхнинните сили са приложени само върху повърхността на отделния елемент и характеризират взаимодействието му с останалата част от флуида.

Да отделим мислено в обема на флуид, който се намира в равновесие, малък куб с площ на стените dS . На него действа масовата сила на тежестта и повърхнинните сили на натиск, породени от налягането p на околния флуид (фиг.24-1). В неподвижните флуиди, поради отсъствие на еластичност на формата, не възникват тангенциални напрежения. Нека за момент се абстрахираме от действието на силата на тежестта, т.е. да пренебрегнем масата на флуида. Тогава от условието за равновесие следва, че силите на натиск $F = p dS$, които действат върху всяка двойка срещуположни стени на куба, трябва да се уравнили. В противен случай кубът би се движил по посока на по-голямата сила, което противоречи на условието, че флуидът е в покой. Тъй като площите dS на всички стени на куба са еднакви, стигаме до заключението, че налягането p върху тях също е еднакво. Ако кубът се допира до стените на съда (фиг.24-1), условието за равновесие изисква налягането p на флуида да е равно

на външното налягане p_0 , с което действа стената на съда.

Следователно в условия, когато може да се пренебрегне силата на тежестта, налягането във всички точки от неподвижен флуид е еднакво и равно на приложеното към флуида външно налягане $p_0 = \text{const}$. До това заключение пръв достига френският физик и математик Блез Паскал (1623–1662).

Законът на Паскал гласи:

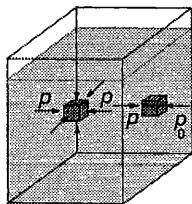
Допълнителното налягане, приложено на произволно място върху затворен в съд несвиваем флуид, се предава без изменение във всички точки от флуида и върху стените на съда.

Когато всяка сутрин в банята натискате с ръка тубичката с паста за зъби, вие виждате закона на Паскал в действие. На този закон се основава действието на хидравличните преси и други устройства, които използват затворени в съд течности. Принципът на действие на хидравличната преса се демонстрира от фиг.24-2. Върху буталото с площ S_1 се прилага сила F_1 , която създава налягане $p = F_1/S_1$. Съгласно със закона на Паскал това налягане се предава без изменение във всички точки от течността и върху второто бутало, чиято площ е S_2 . Течността действа на второто бутало със сила на натиск

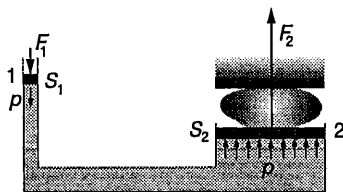
$$(24.1) \quad F_2 = p S_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1.$$

При хидравличните преси $S_2 \gg S_1$. Затова в резултат на действието на малката външна сила F_1 , приложена към буталото 1, възниква многократно по-голяма сила на натиск върху буталото 2: казва се, че се печели сила. По аналогичен начин след натискане с малка сила на спи-

Фиг.24-1.



Фиг.24-2. Хидравлична преса.



рачния педал налягането се предава без изменение в спирачната течност и многократно се увеличава силата, с която челостите или спирачните дискове действат на колелата на автомобила.

Хидростатично налягане

Да разгледаме вертикален съд, запълнен с еднородна несвиваема течност с плътност ρ . Отделяме мислено елемент от течността с форма на цилиндър, чиито основи с площ S са успоредни на повърхността. Горната основа се намира на дълбочина h . Височината dh на цилиндъра е безкрайно малка. Тъй като цилиндърът е в равновесие, трябва сумата от проекциите върху оста h на всички повърхнинни и масови сили да е равна на нула (фиг.24-3)

$$Sp(h) - Sp(h + dh) + \rho g S dh = 0.$$

Съкращаваме S и записваме уравнението във вида

$$dp = \rho g dh,$$

където $dp = p(h + dh) - p(h)$ е разликата в налягането върху двете основи на цилиндъра. След интегриране получаваме:

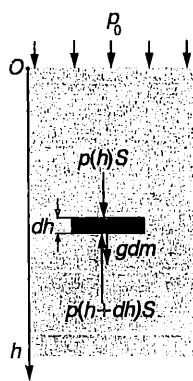
$$p = \rho gh + C.$$

Константата C определяме от граничното условие: на повърхността на течността (при $h = 0$) налягането е равно на външното атмосферно налягане p_0 , т.е. при $h = 0$, $p = C = p_0$. Следователно

$$(24.2) \quad p = \rho gh + p_0.$$

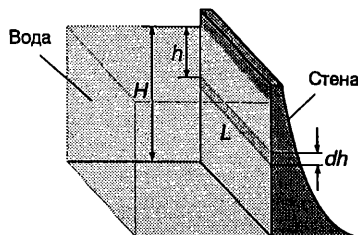
Величината ρgh се нарича *хидростатично налягане*. Хидростатичното налягане е резултат от действието на силата на тежестта. В отворен съд с течност хидростатичното налягане е еднакво за всички точки, които се намират на определена дълбочина h . Съгласно със закона на Паскал всяко допълнително налягане има еднаква стойност в цялата течност. Следователно пълното налягане (външно + хидростатично) е еднакво във всички точки

Фиг.24-3.



от течността, които лежат на една и съща хоризонтална равнина.

Пример 24.1. Определете силата на натиск, с която водата действа на вертикална язовирна стена с широчина L . Язовирът е напълнен с вода до височина H (фиг.24-4).



Фиг.24-4.

Решение. Хидростатичното налягане на дълбочина h е $p = \rho gh$, където ρ е плътността на водата. (Не отчитаме атмосферното налягане, тъй като то действа и от двете страни на стената.) На тънка ивица от стената с широчина dh и площ $dS = Ldh$, намираща се на дълбочина h (фиг. 24-4), водата действа със сила на нормален натиск $dF = p dS = \rho gh L dh$. Резултантната сила е

$$F = \int dF = \int_0^H \rho g L h dh = \frac{1}{2} \rho g L H^2.$$

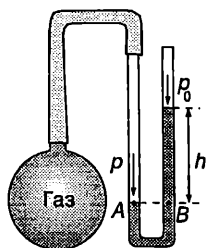
Тъй като хидростатичното налягане нараства с дълбочината, долната част от стената е подложена на по-голям натиск отколкото горната част. Затова язовирните стени се правят по-дебели в основата си.

Манометри и барометри

Манометрите и барометрите са уреди за измерване на налягане. Най-простият манометър представлява U-видна тръба, запълнена с течност, единият край на която е отворен, а другият е свързан към съд с газ, чието налягане p трябва да се определи (фиг.24-5). Тъй като точки A и B лежат в една хоризонтална равнина, налягането в тях е еднакво. Следователно

$$p = p_A = p_B = \rho gh + p_0.$$

Ако се измери разликата във височините h на течността в двете рамена на манометъра, може да се определи налягането



Фиг.24-5. Отворен манометър с течност.

на газа в съда (атмосферното налягане p_0 е известно). На практика с такъв манометър се измерва разликата Δp между налягането на газа и външното атмосферно налягане, която е равна на хидростатичното налягане на стълба течност с височина h в отворената тръба на манометъра:

$$\Delta p = p - p_0 = \rho gh.$$

През 1643 година ученикът на Галилей – италианският физик Евангелиста Торичели (1608–1647) създава първия *живачен барометър*, с който измерва атмосферното налягане. Барометърът на Торичели е стъклена тръба с дължина около 80 см, която отначало се запълва с живак, а след това се обръща и отвореният ѝ край се потапя в съд с живак (фиг.24-6). Част от живака се излива, а пространството над стълба живак се запълва единствено с пари на живака, чието налягане при стайна температура може да се пренебрегне, т.е. $p = 0$ (фиг.24-5). Налягането в точка А е равно на хидростатичното налягане ρgh на стълба живак, а налягането в точка В е равно на външното атмосферно налягане p_0 . Тъй като двете точки са на едно равнище, налягането в тях е еднакво: $p_0 = \rho gh$.

Фиг.24-6. Живачен барометър (тръба на Торичели).



Така чрез измерване на височината h на живачния стълб може да се определи атмосферното налягане. Височината h , измерена в милиметри, се използва като извънсистемна единица за налягане: 1 mm Hg стълб е налягане, равно на хидростатичното налягане на живачен стълб с височина 1 mm.

Една *стандартна атмосфера* (1 atm) е налягане, равно на хидростатичното налягане на живачен стълб с височина h точно равна на 760 mm при температура 0°C и земно ускорение $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$. При тази температура плътността на живака е $\rho = 13\,595 \text{ kg/m}^3$. От формулата за хидростатично налягане $p = \rho gh$ получаваме, че стандартната атмосфера е равна на $1 \text{ atm} = (13\,595 \text{ kg/m}^3)(9,80665 \text{ m/s}^2)(0,760 \text{ m}) = 101\,325 \text{ Pa}$.

Закон на Архимед

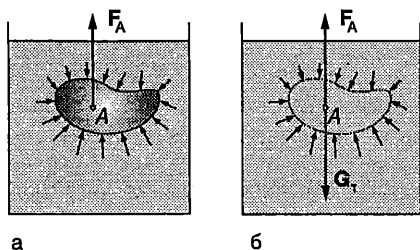
Тъй като хидростатичното налягане нараства с дълбочината h , на по-долните части от повърхността на потопено в течност твърдо тяло течността действа с по-големи сили на нормален натиск, отколкото върху горната повърхност на тялото. В резултат на събирането на силите, действащи върху всички елементи от повърхността на тялото, се получава равнодействаща сила F_A , насочена вертикално нагоре (фиг.24-7а). Силата F_A се нарича *изтласкваща сила*.

Древногръцкият учен Архимед (3 в. пр.н.е.) открива закон, според който

на всяко тяло, потопено в течност (или газ), действа изтласкваща сила, равна по големина на тежестта на изместения от тялото обем течност (или газ).

Изтласкващата (архимедова) сила F_A е насочена вертикално нагоре, а приложената ѝ точка е центърът на тежестта на изместения обем течност (газ).

Законът на Архимед може да се изведе с помощта на следното просто разсъждение: Да разгледаме тяло с произволна форма, което е потопено в течност. Течността упражнява налягане върху тялото, т.е. действа върху неговата повърхност със



Фиг.24-7.

сили на нормален натиск, чиято резултант-на е изтласкващата сила F_A (фиг.24-6а). Нека мислено отстраним тялото и освободения от него обем V запълним със същата течност, която остава мислено отделена от околната течност с повърхност S , еднаква с повърхността на тялото (фиг.24-7б). Тъй като при тази въображаема замяна повърхността S не се изменя по положение, форма и размери, силите на натиск, с които околната течност действа на повърхността S , също няма да се изменят. Не се променя и резултантната сила F_A . Освен силата F_A , на отделения обем от течността действа и силата на тежестта $G_T = V\rho g$. От условието, разглежданият обем течност да е в механично равновесие, следва, че силите F_A и G_T са равни по големина и противоположни по посока, т.е. изтласкващата сила F_A е равна по големина на силата на тежестта G_T (следователно и на теглото) на изместения от тялото обем течност и е насочена вертикално нагоре. Освен това, силата F_A трябва да е приложена в същата точка, както силата на тежестта G_T – в центъра на тежестта A на изместения обем течност. В противен случай механичното равновесие се нарушава, защото двете сили образуват двойка сили, която създава въртящ момент.

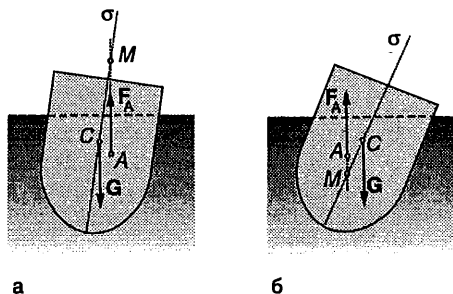
Плаване на телата

На закона на Архимед се основава теорията на плаването, чийто основи полага швейцарският математик Леонард Ойлер (1707–1783). Обемът на изместената от плавателния съд (например кораб) вода се нарича *водоизместимост* на съда. Да разгледаме симетричен кораб, който се намира в равновесие на повърхността на

водата. Силата на тежестта G на кораба се уравнивява от архимедовата сила F_A . Архимедовата сила F_A е приложена в центъра на тежестта A на изместения от кораба обем вода, който се нарича *център на водоизместимост*. Силата на тежестта обаче е приложена в центъра на тежестта C на кораба. При накланяне на кораба положението на центъра на водоизместимост спрямо кораба се измества. Тогава приложените точки на силите G и F_A вече не лежат на една и съща вертикална линия: G и F_A образуват двойка сили. Когато двойката сили се стреми да изправи кораба, неговото положение е устойчиво. Ако двойката сили накланя още повече кораба – положението му е неустойчиво и той се преобръща.

За симетричен кораб центърът на тежестта C лежи в равнината на симетрия σ (фиг.24-8). Точката M , в която линията на действие на архимедовата сила F_A пресича равнината на симетрия, се нарича *метацентър*. При накланяне на кораба положението на метацентъра се изменя. Корабът е устойчив, ако най-ниското положение, до което достига метацентърът, се намира над центъра на тежестта. Тогава двойката сили изправя кораба (фиг.24-8а). Ако при накланянето метацентърът премине под центъра на тежестта C , двойката сили сменя посоката на въртене и преобръща кораба (фиг.24-8б). Като мярка за устойчивостта на кораба служи разстоянието CM , наречено *метацентрална височина*. Колкото по-голяма е метацентралната височина, толкова по-устойчив е корабът.

Фиг.24-8. а) Когато метацентърът M се намира над центъра на тежестта C , корабът е устойчив. б) Ако M премине под C – корабът се преобръща.



Задачи

1. Медицинска сестра натиска буталото на спринцовка със сила 10 N. Колко е налягането на течността в спринцовката, ако площта на буталото е 3 cm²?

2. Пресметнете хидростатичната разлика в кръвното налягане (в паскали и в mm Hg стълб) на кръвта в мозъка и в пръстите на краката на човек, ако разликата във височините на тези две части от тялото е 170 cm. Плътността на кръвта е 1060 kg/m³.

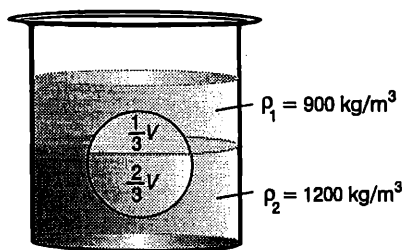
3. Белите дробове на човека могат да функционират нормално, ако изменението на външното налягане не надминава 5% от нормалното атмосферно налягане. На каква максимална дълбочина може да плува човек, който диша с помощта на шнорхел?

4. Ведро с вода се намира в асансьор, който се движи с ускорение a , насочено вертикално нагоре. Определете налягането p на дълбочина h под повърхността на водата.

5. Пластмасово топче плава във вода. Колко е плътността на топчето, ако $3/4$ от неговия обем се намира под водата? Плътността на водата е 1000 kg/m³.

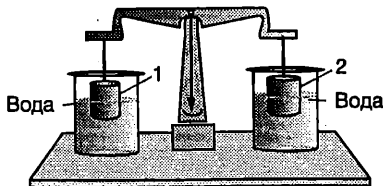
6. В чаша, пълна догоре с вода, плава парче лед. Ще се излее ли вода от чашата, ако се стопи ледът? Обосновете отговора си.

7. Топче плава на границата на две несмесващи се течности, чиито плътности са дадени на фиг. 24-9. Колко е плътността ρ_T на топчето?



Фиг.24-9.

8. Обемът на първата теглилка V_1 (фиг.24-10) е по-голям от обема V_2 на втората теглилка. Когато половината от обема на всяка от тях е потопен във водата, везните са уравновесени. Ще се наруши ли равновесието, ако теглилките изцяло се потопят във водата? Плътността и на двете теглилки е по-голяма от плътността на водата. Обосновете отговора си.



Фиг.24-10.

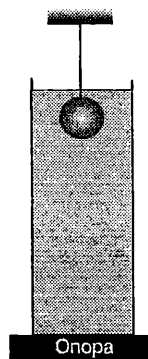
9. Яйце плава в солена вода, при което 5% от обема на яйцето се намира над водата. Ако внимателно върху солената вода се налее чиста вода, така че солената и чистата вода да не се смесват, тогава половината от обема V на яйцето ще е потопен в чистата вода, а другата половина – в солената вода. Колко е плътността ρ_c на солената вода? Плътността на чистата вода е $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$.

10. Кълбо с обем V и плътност ρ_1 е завързано към външна опора и е потопено изцяло в дълбок съд с течност с плътност ρ_2 (фиг.24-11). Срязват нишката и кълбото потъва надолу в течността, като достига максималната си скорост преди да докосне дъното на съда. Теглото на течността заедно със съда е P . Определете силата P_1 , с която съдът натиска опората:

а) преди да се среже нишката;

б) непосредствено след нейното срязване;

в) когато кълбото се движи с постоянна скорост.



Фиг.24-11.

11. В опростен модел звезда се разглежда като кълбо с радиус R от несвиваем флуид с плътност ρ . Ускорението на свободно падане на повърхността на звездата е g_0 . Вътре в звездата ускорението на свободно падане се изменя по закона $g = \frac{g_0}{R} r$, където r е разстояни-

ето до центъра на звездата. Определете хидростатичното налягане на флуида като функция от разстоянието r до центъра на звездата. Колко е налягането в центъра на звездата?

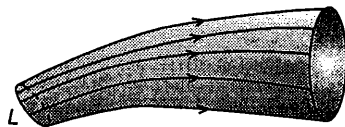
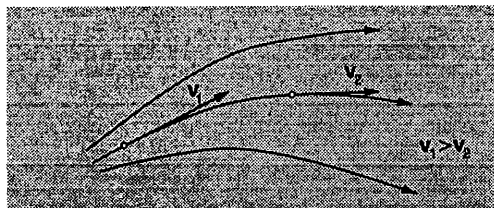
25. Движение на идеален флуид

Явленията, свързани с вискозитета, свиваемостта и топлопроводността на реалните течности и газове усложняват извънредно много изследването на тяхното движение. Редица общи закономерности обаче могат да се получат, като се използва опростен модел на абсолютно несвиваем и невискозен флуид, наречен *идеален флуид*. При описване движението на идеалните флуиди също така не се отчита изменението на температурата и топлообмена между отделните им слоеве.

Стационарно течение

Да направим „моментна снимка“ на движещ се флуид. Всяка точка от пространството, заето от флуида, ще характеризираме със скоростта v на частицата, която в дадения момент преминава през нея. (Частици на флуида се наричат много малки от макроскопична гледна точка обем от течността или газа, които обаче съдържат огромен брой молекули.) Съвкупността от всички вектори v се нарича *поле на вектора на скоростта*. Линия, във всяка точка на която векторът на скоростта е насочен по допирателната, се нарича *токова линия*. Токовите линии се чертаят така, че гъстотата им да характеризира големината на скоростта. В областите с по-голяма скорост токовите линии се съгъствят (фиг.25-1). Когато полето на скоростта не се изменя с течение на времето, движението на флуида се нарича *стационарно*. В противен случай то е *нестационарно*. При стационарно течение всички частици, преминават през определена (произ-

Фиг.25-1. Токови линии. Скоростта на частиците е насочена по допирателната към токовите линии. В областите с по-голяма скорост токовите линии се съгъствят.



Фиг.25-2. Токова тръба.

волно взета) точка от пространството с една и съща скорост, т.е. скоростта, характеризираща тази точка, не се изменя с времето. Картината на токовите линии също остава неизменна. Само при стационарно течение токовите линии съвпадат с траекториите на частиците. По-нататък ще разглеждаме стационарни течения.

Да вземем произволен затворен контур L и през всяка негова точка да прекараме съответната токова линия: токовите линии образуват повърхност, наречена *токова тръба* (фиг.25-2). Тъй като скоростите на частиците са насочени по допирателната към токовата тръба, те не я пресичат и в токова тръба течността тече така, както би текла в гладка твърда тръба със същата форма.

Уравнение за непрекъснатост

На фиг.25-3 е показана много тясна токова тръба. S_1 и S_2 са две произволно взети нейни напречни сечения. Тъй като площите S_1 и S_2 са малки, можем да смятаме, че във всяка точка от S_1 скоростта на флуида е постоянна и има големина v_1 , а във всички точки от S_2 флуидът се движи със скорост v_2 (фиг.25-3). За време dt през сечението S_1 се втича флуид с маса $dm_1 = \rho S_1 v_1 dt$, а през S_2 изтича флуид с маса $dm_2 = \rho S_2 v_2 dt$, където $\rho = \text{const}$ е плътността на несвиваемия флуид. От закона за запазване на масата следва, че $dm_1 = dm_2$, т.е.

$$(25.1) \quad v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Полученият резултат е в сила за две произволно избрани напречни сечения на една токова тръба. Следователно производението от скоростта v на частиците в

Фиг.25-3.



дадено напречно сечение на токова тръба и площта S на това сечение остава постоянно по цялата дължина на тръбата

$$(25.2) \quad vS = \text{const.}$$

Уравнение (25.2) се нарича *уравнение за непрекъснатост* на струята. От него следва, че на местата, където токовата тръба се стеснява, скоростта на струята нараства, а в широките части на тръбата флуидът се движи с по-малка скорост.

Пример 25.1. По аортата, чийто радиус е около 1 см, кръвта се движи със скорост около 30 cm/s. Колко е скоростта на кръвта в капилярите, ако сумата от площите на напречните сечения на всички капиляри е около $0,2 \text{ m}^2$?

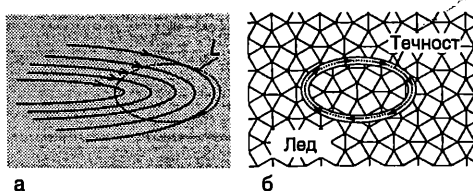
Решение. Масата на кръвта, преминала за определен интервал от време през напречното сечение $S_1 = \pi r^2$ на аортата, е равна на сумата от масите на кръвта, преминала през всички капиляри за същото време. От уравнението за непрекъснатост $v_1 S_1 = v_2 S_2$ определяме скоростта v_2 на кръвта в капилярите

$$v_2 = \frac{\pi r^2 v_1}{S_2} = \frac{3,14(0,01 \text{ m})^2 (0,3 \text{ m/s})}{0,2 \text{ m}^2} = 4,7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Безвихрово и вихрово течение

Всяко циклично движение на течност по затворени тръби и канали е прието да се нарича циркуляция: кръвта циркулира в кръвоносните съдове на човека и животните, водата циркулира по тръбите на системата за парно отопление на сградите и т.н. Във физиката понятието *циркуляция* има по-общ смисъл и е една от важните характеристики на всяко векторно поле, включително на електричните и магнитните полета. Ще дефинираме циркулацията за векторното поле на скоростта при движение на идеален флуид, тъй като в този случай тя има нагледна физична интерпретация.

На *фиг.25-4а* са показани токови линии на движещ се флуид. Нека мислено прекараме произволен затворен контур L във флуида и тясна тръба с постоянно сечение S , по оста на която преминава контурът. Да предположим, че можем внезапно



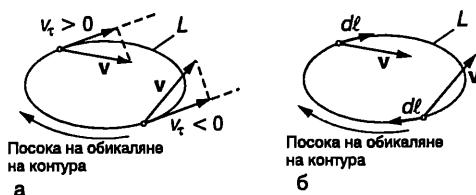
Фиг.25-4.

но да замразим цялата течност извън въображаемата тръба. Ако течността, ограничена от ледените стени, започне да тече вътре в тръбата по посока на часовата стрелка или в обратната посока, тогава циркулацията по тръбата (по контура L) е различна от нула (*фиг.25-4б*). Ако движението на течността в тръбата се преустанови, тогава циркулацията е нула. Дали ще се движи (циркулира) течността вътре в тръбата, зависи от посоката на скоростта в различните точки от контура L . Да изберем посока на обикаляне на контура (например посоката на движение на часовата стрелка). Скоростта във всяка точка от контура L може да се разложи на тангенциална компонента и нормална компонента. Ако тангенциалната компонента е насочена по посоката на обикаляне на контура, нейната стойност се приема за положителна, а когато е насочена в противоположната посока – стойността ѝ е отрицателна (*фиг.25-5а*). Да отделим елемент от тръбата с безкрайно малка дължина $d\ell$. Тангенциалната компонента на импулса на течността в него е $dp_t = v_t(\rho S d\ell)$. За цялата течност в тръбата:

$$p_t = \oint_L dp_t = \rho S \oint_L v_t d\ell,$$

където интегрирането се извършва по затворения контур L . При $p_t > 0$ течността ще продължи да се движи в тръбата по инерция по посока на часовата стрелка, а при

Фиг.25-5.



$p_t < 0$ – в противоположната посока. Ако обаче $p_t = 0$, движението на флуида ще се прекрати. Коя от тези три възможности ще се реализира в даден конкретен случай, зависи от стойността на интеграла

$$(25.3) \quad \Gamma = \oint_L v_t d\ell,$$

който се нарича *циркуляция на вектора на скоростта* по затворения контур L . Ако въведем елементарен вектор $d\ell$ с модул, равен на дължината на елемента $d\ell$ и насочен в избраната посока на обикаляне на контура L (фиг.25-5б), уравнение (25.3) може да се запише във вида

$$(25.4) \quad \Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\ell.$$

Когато циркуляцията на полето на скоростта, пресметната по произволен затворен контур, е равна на нула, движението на флуида се нарича *безвихрово*. *Вихрово* е движение, за което циркуляцията е различна от нула. Частен случай на вихрово движение е течение, чиито токови линии са затворени криви (например водовъртеж). Тогава, ако в качеството на затворен контур изберем една от токовете линии, циркуляцията по нея е различна от нула, защото по определение във всяка точка от токовата линия скоростта е насочена по допирателната: частиците на флуида се движат по токовата линия по посока на движението на часовата стрелка или в противоположната посока.

Закон на Бернули

Да отделим от стационарния поток на идеален флуид тясна токова тръба. За време dt обемът флуид, затворен между две произволно взети напречни сечения S_1 и S_2 на токовата тръба, ще се придвижи по посока на токовите линии, при което сечение S_1 се премества на разстояние $d\ell_1$, а сечение S_2 – на разстояние $d\ell_2$ (фиг.25-6). Тъй като флуидът е несвиваем, двата сиви обема от фиг.25-6 са равни: $dV_1 = dV_2 = dV$. Върху разглеждания обем от флуида действат силата на тежестта и повърхнинните сили на натиск. Силите на натиск върху околната повърхност на токовата тръба са перпендикулярни на скоростта на флуида

в тръбата и не извършват работа. Общата работа на силите на натиск, действащи върху двете напречни сечения, е (фиг.25-6)

$$(25.5) \quad dA = (p_1 S_1) d\ell_1 - (p_2 S_2) d\ell_2 = (p_1 - p_2) dV.$$

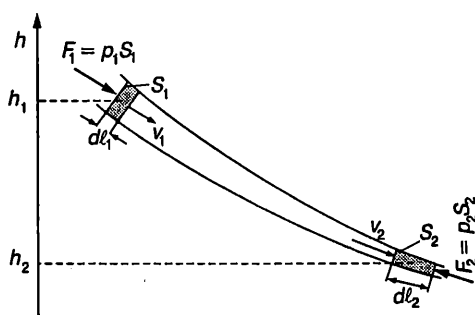
Ще определим изменението dE на механичната енергия на разглеждания обем от флуида. Тъй като течението е стационарно, флуидът, който се намира в незатъмнената част на токовата тръба (фиг.25-6) в момента $t + dt$, има същата кинетична и потенциална енергия, както флуида, който е запълвал тази част от тръбата в началния момент t . Затова изменението dE на механичната енергия на целия разглеждан обем от флуида се определя единствено от разликата в механичната енергия (кинетична + потенциална) на двата затъмнени обема. Тъй като обемите dV_1 и dV_2 са безкрайно малки, можем да смятаме, че всички частици от флуида в тях се движат с еднакви скорости съответно равни на v_1 и v_2 и се намират на еднакви височини h_1 и h_2 . Тогава

$$(25.6) \quad dE = \left(\frac{\rho dV v_2^2}{2} + \rho dV g h_2 \right) - \left(\frac{\rho dV v_1^2}{2} + \rho dV g h_1 \right).$$

Изменението на механичната енергия на флуида е равно на работата на външните сили на натиск. Приравняваме десните страни на уравнения (25.5) и (25.6), съкращаваме на dV и получаваме

$$(25.7) \quad p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2,$$

Фиг.25-6.



където $\rho gh = \frac{dmgh}{dV}$ е гравитационната потенциална енергия на единица обем от флуида ($\rho = \frac{dm}{dV}$), а $\frac{\rho v^2}{2}$ е кинетичната енергия на единица обем от флуида. От уравнение (25.5) следва, че налягането е равно на работата, която извършват силите на натиск, отнесена към единица обем от флуида: $p = dA/dV$, т.е. и трите едночлена в уравнение (25.7) могат да се разглеждат като вид енергия (или работа), отнесена към единица обем от флуида. Самото уравнение е следствие от закона за запазване на енергията.

Когато напречното сечение на токовата тръба не е безкрайно малко, величините p , v и h са различни за различните точки от напречното сечение, поради което равенство (25.7) е само приблизително вярно. То става точно, когато напречното сечение на токовата тръба клони към нула, т.е. когато тръбата се стяга около една токова линия. Следователно величините от двете страни на равенство (25.7) трябва да се отнесат към две точки от една токова линия. Тъй като тези точки са избрани произволно, следва изводът, че за всяка точка от една токова линия величината

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh \text{ има една и съща стойност}$$

$$(25.8) \quad p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = B = \text{const.}$$

Това уравнение е получено през 1738 година от швейцарския математик и физик Даниел Бернули (1700–1782). То изразява *закона на Бернули* за стационарно течение на идеален флуид, който гласи:

Сумата от налягането p , кинетичната енергия на единица обем $\frac{\rho v^2}{2}$ и гравитационната потенциална енергия на единица обем ρgh на идеален флуид има една и съща стойност за всички точки на една токова линия.

Константата B в уравнение (25.8) се нарича *константа на Бернули*. Доказва се, че при безвихрово течение константата

на Бернули B има една и съща стойност във всички точки на флуида. Когато течението е вихрово, B има еднаква стойност за всички точки от една токова линия, но различните токови линии се характеризират с различни константи на Бернули.

За хоризонтална токова линия ($h_1 = h_2$) уравнение (25.7) добива вида

$$(25.9) \quad p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Ако $v_1 > v_2$, от уравнение (25.9) следва, че $p_1 < p_2$, т.е. там, където скоростта е по-голяма, налягането е по-малко и обратно. Това следствие от закона на Бернули обяснява редица явления и намира широко практическо приложение.

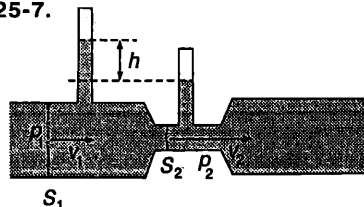
Пример 25.2. Някои животни правят леговищата си под земята. Обикновено леговището има поне два изхода. С помощта на закона на Бернули обяснете как се проветрява бърлогата? Къде е най-добре да бъдат двата изхода?

Решение. Когато въздухът над двете дупки се движи с различна скорост, съгласно със закона на Бернули възниква разлика в налягането. Започва движение на въздуха в бърлогата към изхода с по-ниско налягане (към изхода, над който вятърът е по-силен). От другата дупка влиза свеж въздух и бърлогата се проветрява. Подходяща разлика в налягането се създава, когато едната дупка е на завет, а другата – на открито или по-високо място, където обикновено вятърът е по-силен.

Някои приложения на закона на Бернули

Редица прибори за измерване потока на течности в тръби и тяхната скорост използват закона на Бернули. Чертежът от *фиг.25-7* илюстрира метод за измерване разхода на вода, който се използва в някои видове водомери. В широката тръба, по която тече водата, се включва къса тръба с по-малко сечение (*тръба на Вентури*).

Фиг.25-7.



ρ_l). Широката и тясната част на тръбата се свързват към открити манометри. В стеснената част скоростта на водата е по-голяма (защо?), затова там съгласно със закона на Бернули налягането е по-малко. Разликата в налягането в широката и тясната част на тръбата се определя по разликата h в нивата на течността в двата манометъра: $p_1 - p_2 = \rho gh$. Ако са известни сеченията S_1 и S_2 на двете тръби, от уравнение (25.9) се определя обемът Q на водата, преминала за единица време през напречното сечение на тръбата

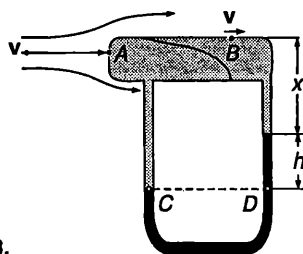
$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Фактът, че налягането се понижава в областите, където скоростта на струята е по-голяма, намира приложение във водоструйните помпи, в карбураторите на автомобилите, пулверизаторите и редица други устройства.

Пример 25.3. За измерване скоростта на флуид се използва тръбата на Пито (*фиг.25-8*). Тя е разделена на две отделни секции, свързани към двете колена на U-образен манометър. Всяка от секциите има отвор (A и B). Тръбата се поставя в течащия флуид, както е показано на фигурата: в точка A скоростта на флуида е нула, а в точка B тя е приблизително равна на скоростта v на потока далеч от тръбата.

а) Изразете скоростта v на флуида чрез разликата h в равнището на манометричната течност в двете колена на манометъра. Плътноста на флуида е ρ , плътността на манометричната течност е ρ_m ($\rho_m > \rho$). Малката разлика във височините, на които се намират двата отвора, да не се отчита.

б) Миниатюрна тръба на Пито е използвана за определяне скоростта v на кръвен поток. Пресметнете v , ако $h = 15$ mm. Манометърът е живачен ($\rho_m = 13,6$ g/cm³). Плътноста на кръвта е $\rho = 1,06$ g/cm³, земното ускорение е $g = 9,8$ m/s².



Фиг.25-8.

метърът е живачен ($\rho_m = 13,6$ g/cm³). Плътноста на кръвта е $\rho = 1,06$ g/cm³, земното ускорение е $g = 9,8$ m/s².

Решение. Точки A и B се намират на границата между външния флуид и флуида, запълващ тръбата. В точка A се прекъсва една от токовите линии. Далеч от тръбата скоростта и налягането в точките от тази токова линия са приблизително същите, както в точка B . От закона на Бернули определяме разликата в налягането $p_A - p_B$ в точките A и B

$$p_A - p_B = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Флуидът вътре в тръбата на Пито, както и манометричната течност, са в покой. Точките C и D на манометъра са на едно равнище, затова налягането в тях е еднакво: $p_C = p_D$, където

$$p_C = (h + x)\rho g + p_A;$$

$$p_D = h\rho_m g + x\rho g + p_B.$$

В горните две равенства p_A и p_B са външното налягане, което потокът оказва върху двата отвора на тръбата (неподвижният флуид в тръбата е подложен на външно налягане). Приравняваме десните страни на двете равенства и изразяваме разликата в налягането в точките A и B

$$p_A - p_B = (\rho_m - \rho)gh.$$

Заместяваме $p_A - p_B$ в закона на Бернули и определяме скоростта v на флуида

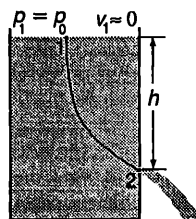
$$v = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho}}.$$

$$\text{б) } v = 1,9 \text{ m/s.}$$

Пример 25.4. Формула на Торичели. В стената на голям открит отгоре съд, пълен с вода, е пробит малък отвор. Определете скоростта, с която водата изтича през отвора, ако той се намира на разстояние h под равнището на водата (*фиг. 25-9*).

Решение. На *фиг. 25-9* са показани две точки, които лежат на една и съща токова линия. Точка 1 се намира на повърхността, а точка 2 е от сечението на отвора. Тъй като и двете точки са от откритите части на съда, налягането на водата в тях е равно на външното атмосферно налягане p_0 . Отворът е много малък,

Фиг.25-9.



поради което равнището на водата в съда се понижава много бавно, т.е. скоростта на водата в точка 1 е приблизително равна на нула. Избираме нулевото равнище на потенциалната енергия да е на височината на отвора. Прилагаме закона на Бернули за точките 1 и 2, като в уравнение (25.7) заместваме $p_1 = p_2 = p_0$; $v_1 = 0$; $h_1 = h$ и $h_2 = 0$. Получаваме: $\rho gh = \rho v_2^2 / 2$, откъдето определяме скоростта, с която водата изтича през малкия отвор

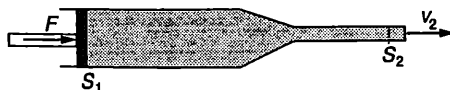
$$v = \sqrt{2gh}.$$

Следователно скоростта на водата е същата, както на тяло, което пада свободно от височина h . Този резултат е известен като *формула на Торичели*.

Задачи

1. Когато духате с уста между два успоредни листа хартия, те се приближават един до друг и дори се допират. Използвайте закона на Бернули, за да обясните този ефект.
2. Защо е опасно (особено за малки деца) да се стои близо до железопътна линия, по която с голяма скорост преминава влак?
3. Димът се издига по-бързо по комина, когато над отвора на комина духа вятър. Използвайте закона на Бернули, за да обясните този ефект.
4. Ураганен вятър, който духа успоредно на прозорците на стаята, може да предизвика счупване на стъклата. Навътре или навън ще се разлетят повечето парчета стъкло? Защо прозорците се отварят навътре, а не навън?
5. По тръба с радиус 6 cm тече вода със скорост 1 m/s. Тръбата има стеснен участък с радиус 2 cm. Колко е скоростта на водата в него?
6. По кръвоносен съд с радиус r кръвта се движи със скорост v . Съдът се разклонява на 18 части, всяка от които има радиус $r/3$. Колко е скоростта на кръвта в разклоненията на кръвоносния съд?
7. На дъното на голяма открита цистерна, пълна с бензин до височина $h = 1,8$ m, е пробита малка дупка с напречно сечение $S = 1$ mm². Колко литра бензин ще изтече през дупката за време $t = 60$ s?
8. Тръбата на Вентури (фиг.25-7) може да се използва, за да се измери дебитът Q на водата (в литри за секунда (l/s)), течаща по водопровод. Определете дебита Q , ако радиусите на двете тръби са $r_1 = 10$ cm и $r_2 = 5$ cm. Разликата в налягането на водата в двете тръби е $p_1 - p_2 = 2,4 \cdot 10^4$ Pa. Плътността на водата е $\rho = 1000$ kg/m³.

9. Спринцовка с напречно сечение S_1 е поставена хоризонтално (фиг. 25-10). Към буталото на спринцовката е приложена сила F и то се придвижва без триене. С каква скорост изтича водата през отвора на спринцовката, ако напречното му сечение е S_2 ? Отчетете, че S_2 е много по-малко от S_1 . Плътността на водата е ρ .



Фиг.25-10.

10. Обърнали ли сте внимание, че струята, която изтича от кухненския кран, се стеснява надолу? Обяснете защо.

Пресметнете диаметъра на струята на разстояние $L = 0,5$ m от отвора на крана. Диаметърът на отвора е $d_1 = 0,01$ m, а дебитът на водата е $Q = 0,2 \cdot 10^{-3}$ m³/s.

Указание. Частиците на водата излизат от отвора на крана с начална скорост $v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}$,

след което се движат равноускорително (падат свободно с ускорение $g = 10$ m/s²).

11. В цилиндричен съд с площ на дъното S_1 , който е поставен вертикално, е налята идеална течност. В началния момент височината на стълба течност в съда е H . Течността изтича през малка дупка с площ S_2 ($S_2 \ll S_1$) в дъното на съда. Определете:

- а) времето t , след което височината на течността в съда ще стане $h = H/2$;
- б) времето T , за което ще изтече цялата течност.

12. Единият край на тясната тръба, показана на фиг. 25-11, е потопен във вода. Тръбата се върти около вертикалната ос O .

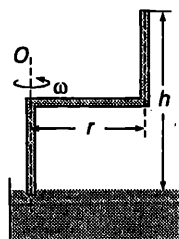
- а) При каква ъглова скорост ω водата ще запълни цялата тръба?
- б) При каква ъглова скорост ω_1 водата ще изтича от горния край на тръбата със скорост v спрямо тръбата?

Указание. Разгледайте задачата в неинерциална отправна система, в която тръбата е в покой. Докажете, че потенциалната енергия на единица обем от водата в полето на центробежната инерционна сила е

$$-\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2.$$

Добавете този едночлен в закона на Бернули.

Фиг.25-11.



26. Движение на вискозен флуид

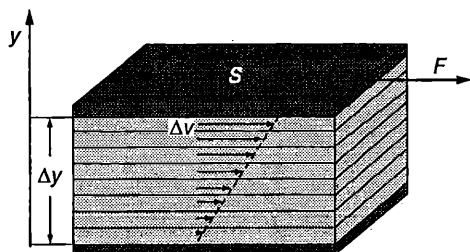
Вискозитет

От закона на Бернули за идеален флуид следва, че ако флуидът тече с постоянна скорост по цилиндрична хоризонтална тръба, налягането във всички сечения на тръбата е еднакво (вж. уравнение 25.9). Опитът обаче показва, че стационарно течение е възможно само ако се поддържа постоянна разлика в налягането в двата края на тръбата. Налягането трябва да намалява по дължината на тръбата, за да може натискът, породен от тази разлика в налягането, да преодолее силите на вътрешно триене, пречещи движението на реалните флуиди.

Когато два слоя от реален флуид се движат (хлъзгат) един спрямо друг, между тях възникват тангенциални сили на взаимодействие, които се стремят да забавят слоя, който се движи с по-голяма скорост, и да ускорят слоя с по-малка скорост. На причините за възникване на такива сили ще се спрем по-подробно в §35. Тук ще се ограничим с разглеждането само на закона за вътрешното триене, открит експериментално от Нютон.

На фиг.26-1 са показани две еднакви успоредни пластинки, всяка с площ S , разделени от тънък слой флуид. Долната пластинка се придържа неподвижна, а горната се движи със скорост Δv спрямо нея. Опитът показва, че за такова движение на горната пластинка е необходима сила с големина F , която е право пропорционална на площта S на пластинките и

Фиг.26-1.



на разликата в техните скорости Δv и е обратнопропорционална на разстоянието Δy между двете пластинки

$$(26.1) \quad F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta y}.$$

Коефициентът на пропорционалност η (ета) се нарича *коэффициент на вътрешно триене* или *вискозитет* на флуида. Тъй като частиците, които са в непосредствена близост до двете пластинки, прилепват към тях, уравнение (26.1) всъщност изразява тангенциалната сила на взаимодействие между два слоя от флуида, които се движат с различни скорости. Когато разстоянието между слоевете е безкрайно малко (dy), тангенциалната сила на вътрешно триене между тях е

$$(26.2) \quad F = \eta S \frac{dv}{dy}.$$

Величината dv/dy се нарича *градиент на скоростта*. Той характеризира бързината, с която се изменя скоростта в направление на оста y . Уравнение (26.2) изразява закона на Нютон за вътрешното триене.

Единицата за вискозитет се въвежда от закона на Нютон за вътрешното триене

$$\eta = \frac{F dy}{S dv} \rightarrow [\eta] = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot m/s} = Pa \cdot s.$$

Вискозитетът η е характеристика на флуида. Например маслата имат голям вискозитет, а водата – по-малък. Вискозитетът на газовете е много по-малък от вискозитета на течностите. За даден флуид вискозитетът зависи от параметрите, характеризиращи вътрешното му състояние, и преди всичко от температурата. В таблица 26.1 са дадени вискозитетите на някои флуиди при различни температури.

Ламинарно и турбулентно течение

Вискозен флуид тече по цилиндрична тръба. Частиците, които са в контакт със стената на тръбата, прилепват към нея и са неподвижни. Ако мислено разделим флуида на тънки цилиндрични слоеве, те ще се хлъзгат един спрямо друг, движейки се с различни скорости. Колкото по-далеч от

Таблица 26.1. Вискозитет на някои флуиди в единици Pa·s

Темпера- тура, °C	Рициново масло	Вода	Сух въздух	Кръв	Кръвна плазма
0	5,3	$1,792 \cdot 10^{-3}$	$1,71 \cdot 10^{-5}$		
20	0,986	$1,005 \cdot 10^{-3}$	$1,81 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$
37		$0,695 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$	$2,08 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$
60	0,08	$0,469 \cdot 10^{-3}$	$2,00 \cdot 10^{-5}$		
80	0,03	$0,357 \cdot 10^{-3}$	$2,09 \cdot 10^{-5}$		
100	0,017	$0,284 \cdot 10^{-3}$	$2,18 \cdot 10^{-5}$		

стените на тръбата е един слой, толкова по-голяма е неговата скорост. Максимална е скоростта на частиците, които се движат по оста на тръбата (фиг.26-2а). Течение, при което частиците на флуида като че ли са разделени на отделни слоеве, които само се хлъзгат един спрямо друг, без да се смесват, се нарича *ламинарно течение* (от латински *lamina* – пластинка). Ламинарното движение е стационарно: то е устойчиво и картината на токовите линии не се изменя с течение на времето.

Доказва се (вж. пример 26.3), че при ламинарно течение по дълга цилиндрична тръба скоростта в произволно напречно сечение на тръбата се изменя по закона

$$(26.3) \quad v = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

където R е радиусът на тръбата, r – разстоянието до нейната ос, а $v_{\max}$ е скоростта на частиците, които се движат по оста на тръбата. Параболичният профил на скоростта, съответстващ на уравнение (26.3), е показан на фиг.26-2б. Важна характеристика на течението е неговата средна скорост $v_{\text{ср}}$. Това е такава постоянна скорост, еднаква за всички частици от флуида, при движение с която през напречното сечение на тръбата за единица време би пре-

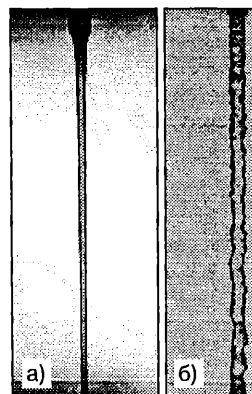
минавал същият обем от флуида, както при реалното течение, където отделните слоеве се движат с различни скорости.

Доказва се (вж. пример 26.3), че когато разпределението на скоростта се описва с уравнение (26.3), средната скорост е

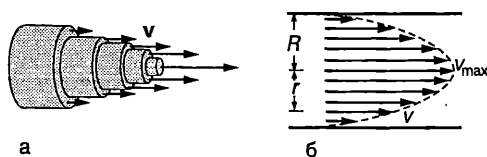
$$(26.4) \quad v_{\text{ср}} = \frac{v_{\max}}{2}.$$

Ламинарно течение се демонстрира с опита от фиг.26-3а. По оста на тръба, по която тече вода, се пуска тънка струя от оцветена вода. Когато течението е ламинарно, струята остава ясно очертана и не се смесва с чистата водата. При увеличаване на скоростта на водата настъпва момент, когато рязката граница между оцветената и неочетената течност изчезва (фиг.26-3б). Започва смесване на водата от различните слоеве и течението става *турбулентно* (от латински *turbulentus* – неспокоен). Скоростта, при която ламинарното течение преминава в турбулентно, се нарича *критична скорост*. При турбулентно течение частиците на флуида се движат по сложни, пресичащи се траектории, които непрекъснато се изменят с времето.

Фиг.26-3. а) Ламинарно движение; б) турбулентно движение.



Фиг.26-2. Ламинарно течение по цилиндрична тръба.



Теоретичният анализ на движението на вискозен флуид показва, че по принцип е възможно ламинарно

течение с произволно големи скорости – такова движение не противоречи на законите на хидродинамиката. Оказва се обаче, че само ламинарните течения с малки скорости са устойчиви. Ако в такова течение в някоя малка област възникне флукутация, т.е. отклонение от стационарността, тя бързо затихва с времето и не оказва влияние на общия поток на флуида. Обратно, дори много малки флукутации, възникващи в бързи ламинарни течения, се разрастват и обхващат все по-големи обеми от флуида. Затова ламинарните течения с голяма скорост са неустойчиви и не се реализират на практика. Като критерий за устойчивостта на течението служи безразмерната величина

$$(26.5) \quad Re = \frac{\rho v_{cp} \ell}{\eta},$$

наречена *число на Рейнолдс* в чест на ирландския физик и инженер Осборн Рейнолдс (1842–1912). Числото на Рейнолдс се определя от плътността ρ на флуида, от неговата средна скорост v_{cp} , от характерния размер на напречното сечение на потока ℓ (например диаметъра d на тръбата, по която тече флуида: $\ell = d$) и от вискозитета η на флуида. За всяко конкретно течение съществува определена *критична стойност* $Re_{кр}$ на числото на Рейнолдс. Когато $Re < Re_{кр}$, ламинарното течение е устойчиво и се реализира на практика. При $Re > Re_{кр}$ ламинарното движение става неустойчиво, случайните флукутации се разрастват и движението преминава в турбулентно. Критичната стойност на числото на Рейнолдс обикновено се определя експериментално. За течение по кръгла цилиндрична тръба $Re_{кр}$ е около 2200. Загубата на устойчивост и преходът към турбулентност, както и детайлната характеристика на турбулентните течения, са едни от най-сложните въпроси на хидродинамиката, които все още не са напълно изучени.

Турбулентните течения се характеризират с по-големи загуби на енергия, отколкото ламинарните. Освен че се отделя топлина в резултат на вътрешното триене, при турбулентните движения се излъчват и механични (звукови вълни) с хаотич-

но изменящи се честоти и амплитуди, т.е. такова движение е съпроводено от звуков шум. Регистрирането на шума, свързан с турбулентното движение на кръвта, дава възможност да се изследва сърдечната дейност и да се регистрират някои сърдечни аномалии.

Пример 26.1. По аортата кръвта се движи със средна скорост 0,3 m/s, а по една от артериите – със скорост 0,02 m/s. Диаметърът на аортата е 2 cm, а на артерията 0,8 cm. Пресметнете числото на Рейнолдс за потока на кръвта в двата кръвоносни съда и направете извод за характера на течението. Плътността на кръвта е $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, а вискозитетът ѝ е $\eta = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Решение. Числото на Рейнолдс за кръвния поток през аортата (цилиндрична тръба) е

$$Re = \frac{\rho v_{cp} \ell}{\eta} = \frac{(1,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)(0,3 \text{ m/s})(0,02 \text{ m})}{2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 3100.$$

Тъй като $Re > Re_{кр}$ ($Re_{кр} = 2200$), кръвният поток през аортата е турбулентен.

За артерията: $Re = 80$. Следователно движението на кръвта по артериите е ламинарно.

Ще обърнем внимание, че получените резултати имат характер само на груба оценка. Кръвта съдържа твърди частици, а нейният вискозитет зависи от скоростта.

Формула на Поазьой

Френският физик Жан Луи Мари Поазьой (1799–1869) изследва движението на кръвта в кръвоносните съдове и установява експериментално, че обемният поток Q , т.е. обемът вискозен флуид, преминал за единица време през напречното сечение на цилиндрична тръба, е правопрпорционален на разликата в налягането Δp в двата края на тръбата и на четвъртата степен на нейния радиус R . Освен това потокът Q е обратнопропорционален на дължината ℓ на тръбата и на вискозитета η на флуида

$$(26.6) \quad Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta \ell}.$$

Уравнение (26.6) се нарича *формула на Поазьой*. Тя е в сила за ламинарен поток,

но с приближение може да се прилага и за някои турбулентни течения, например за кръвоносната система на човека и животните. Специално ще подчертаем силната зависимост (R^4) на обемния поток Q от радиуса R на тръбата. Например, ако радиусът R се увеличи само с 19%, потокът нараства 2 пъти. Тази силна зависимост на Q от R дава възможност чрез съкращаване на мускулите, които обвиват стените на кръвоносните съдове, лесно да се регулира потокът на кръвта – дори малко свиване на кръвоносния съд води до значително намаляване на кръвния поток. От друга страна, например поради артеросклероза, еластичността на кръвоносните съдове намалява, а отлагането на холестерин върху стените им води до намаляване на техния вътрешен радиус. За да се поддържа нормалното за организма кръвообращение, трябва да се увеличи разликата в налягането Δp , което от своя страна води до претоварване на сърцето.

Пример 26.2. Обемният поток на кръвта през голямата артерия на куче е $Q = 1 \text{ cm}^3/\text{s}$. Радиусът на артерията е $R = 0,4 \text{ cm}$. Определете:

а) средната и максималната скорост на кръвта;

б) разликата в налягането Δp в двата края на участък от артерията с дължина $\ell = 10 \text{ cm}$;

в) необходимата мощност P за поддържане на кръвния поток през този участък от артерията.

Вискозитетът на кръвта е $\eta = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Решение. а) Обемният поток Q е равен на произведението от средната скорост v_{cp} и напречното сечение S на тръбата. Следователно

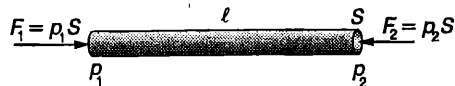
$$v_{\text{cp}} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{(1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s})}{3,14(4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Максималната скорост на кръвта определяме от формула (26.4)

$$v_{\text{max}} = 2v_{\text{cp}} = 0,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

б) Разликата в налягането определяме от формулата на Поазьой (26.6)

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{8\eta \ell v_{\text{cp}}}{R^2} = \\ &= \frac{8(2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0,1 \text{ m})(0,02 \text{ m/s})}{(4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 2,1 \text{ Pa}. \end{aligned}$$



Фиг.26-4.

в) Резултантната сила на натиск, която действа на кръвта в разглеждания участък от артерията (фиг.26-4), е: $F = S(p_1 - p_2) = S\Delta p$.

Механичната мощност на силата F е

$$P = Fv_{\text{cp}} = S\Delta p v_{\text{cp}} = \pi R^2 \Delta p v_{\text{cp}} = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ W}.$$

Пресметнатата механична мощност се получава в резултат на работата на сърцето. Силите на вътрешно триене преобразуват механичната енергия в топлина. За сравнение ще отбележим, че скоростта на метаболизма в случая е около 10 W, т.е. механичната мощност на сърцето е една много малка част от общата мощност, отделена при обмяната на веществата.

Пример 26.3. По хоризонтална цилиндрична тръба с дължина ℓ и радиус R тече несвиваем флуид с вискозитет η . Налягането в двата края на тръбата е съответно p_1 и p_2 (фиг. 26-4).

а) Изразете скоростта v на флуида като функция от разстоянието r до оста на тръбата и определете максималната скорост v_{max} .

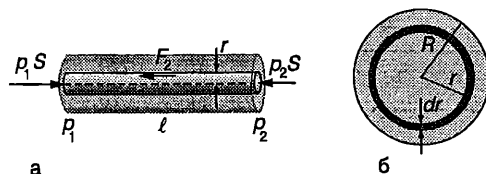
б) Определете обемния поток Q на флуида.

в) Докажете, че средната скорост v_{cp} на флуида е равна на половината от максималната му скорост v_{max} .

Решение. а) Да отделим мислено от потока цилиндър с радиус r , чиято ос съвпада с оста на тръбата (фиг.26-5а). На флуида в цилиндъра действа хоризонтална сила на натиск с големина $F_1 = (p_1 - p_2)S = (p_1 - p_2)\pi r^2$, насочена по посока на движението на флуида. Освен това околният флуид действа на повърхността на цилиндъра със сила на вътрешно триене F_2 , която е насочена в противоположната посока и се стреми да забави флуида. Големината на силата на вътрешно триене се изразява от закона на Нютон (26.2)

$$F_2 = -\eta S_2 \frac{dv}{dr} = -\eta 2\pi r \ell \frac{dv}{dr},$$

Фиг.26-5.



където $S_2 = 2\pi r\ell$ е околната повърхност на цилиндъра, а dv/dr е градиентът на скоростта: скоростта се изменя най-бързо в радиално направление – от оста на тръбата към нейната повърхност. Знакът минус отчита, че скоростта на флуида намалява при отдалечаване от оста на тръбата, т.е. при $dr > 0$ $dv < 0$. При стационарно течение двете сили се уравновесяват, т.е. $F_1 = F_2$ или

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta 2\pi r\ell \frac{dv}{dr}.$$

Разделяме променливите r и v

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r dr.$$

Интегрираме и получаваме

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} r^2 + C.$$

Стойността на константата C определяме от граничното условие: частиците на флуида, които са в контакт с тръбата, прилепват към нея и остават неподвижни, т.е. $v = 0$ при $r = R$.

Следователно $C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} R^2$. Заместваме C и получаваме зависимостта на скоростта v на флуида от разстоянието r до оста на тръбата

$$v = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta\ell} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Функцията $v(r)$ има максимум при $r = 0$, т.е. частиците, преминаващи по оста на тръбата, се движат с максимална скорост

$$v_{\max} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta\ell}.$$

б) Разделяме мислено напречното сечение на тръбата на тънки концентрични пръстени. На *fig.26-56* е показан един от пръстените с радиус r , дебелина dr и площ $dS = 2\pi r dr$. Тъй като пръстенът е безкрайно тънък, всички частици, преминаващи през него, се намират на еднакво разстояние r от оста на тръбата и имат еднаква скорост v . Обемният поток на флуида през разглеждания пръстен е

$$dQ = v dS = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta\ell} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr.$$

За да определим потока през цялото напречно сечение на тръбата, интегрираме в граници от $r = 0$ до $r = R$

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^2}{2\eta\ell} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr.$$

Получаваме формулата на Поазой (26.6)

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta\ell} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta\ell},$$

където $\Delta p = (p_1 - p_2)$ е разликата в налягането в двата края на тръбата.

в) По определение $Q = S v_{\text{cp}} = \pi R^2 v_{\text{cp}}$. Приравняваме десните страни на това равенство и формулата на Поазой и изразяваме средната скорост

$$v_{\text{cp}} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{8\eta\ell} = \frac{v_{\max}}{2},$$

където сме отчели получения в подточка а) резултат за максималната скорост $v_{\max}$.

Задачи

1. Върху голяма хоризонтална плоча е поставена стъклена пластинка с площ $S = 0,1 \text{ m}^2$. Между пластинката и плочата има тънък слой от течност с постоянна дебелина $d = 2 \text{ mm}$. Каква хоризонтална сила трябва да се приложи към пластинката, за да се движи тя със скорост $v = 0,1 \text{ m/s}$? Разгледайте случаите, когато течността е:

а) вода с вискозитет $\eta = 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$;

б) масло с вискозитет $\eta = 0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Защо маслото се предпочита пред водата като смазочен материал?

2. Как ще се измени кръвният поток през артерия, ако радиусът на артерията се намали $\sqrt{2}$ пъти? Разликата в налягането да се приеме за постоянна.

3. Аортата на възрастен човек има радиус $R = 1,3 \text{ cm}$. Определете изменението на налягането Δp на разстояние $\ell = 20 \text{ cm}$ по нейната дължина, ако кръвният поток е $Q = 0,1 \text{ l/s}$. Вискозитетът на кръвта е $\eta = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

4. От вертикална цилиндрична тръба, запълнена с вискозна течност, за време t изтича половината течност. За колко време ще изтече цялата течност?

5. Тънка цилиндрична тръба с дължина ℓ и диаметър d е запълнена изцяло с течност с плътност ρ и вискозитет η . Определете времето, за което ще изтече течността от тръбата, ако тя е наклонена под ъгъл α спрямо хоризонта.

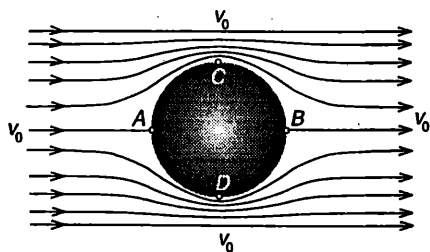
27. Движение на твърдо тяло във флуид

Парадокс на Д'Аламбер – Ойлер

През 1744 година френският математик Жан Льо Ронд Д'Аламбер (1717–1783) и независимо от него Ойлер (през 1745 г.) доказват теоретично, че при праволинейно и равномерно движение на твърдо тяло с произволна форма в безкраен идеален флуид тялото не изпитва съпротивление от страна на флуида. Опитът обаче показва друго: всички флуиди оказват съпротивление на движещите се в тях тела. Това несъответствие между изводите на теорията и резултатите от експеримента е наречено парадокс на Д'Аламбер – Ойлер.

За да изясним отсъствието на съпротивление, ще анализираме частния случай, когато твърдо тяло с форма на кълбо се движи праволинейно и равномерно със скорост v_0 в безкраен идеален флуид. Удобно е задачата да се разглежда в отправна система, свързана с тялото. В тази отправна система тялото е неподвижно, а далеч от него частиците на флуида се движат по праволинейни траектории с постоянна скорост v_0 – токовите линии са успоредни прави. В близост до кълбото те се закривяват и симетрично го обхващат от всички страни (фиг.27-1). В челната точка A и в задната точка B , където се прекъсва токова линия, скоростта на флуида е нула, а налягането съгласно със закона на Бернули е максимално. Най-голяма е скоростта на флуида, обтичащ кълбото, в точки C и D , където токовите линии са най-гъсто разположени. От закона на Бернули следва, че в тези точки наляга-

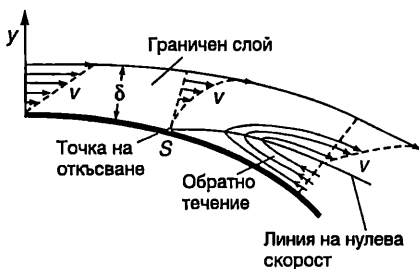
Фиг.27-1.



нето е минимално. Следователно в челната полусфера налягането е максимално в челната точка A , след това намалява и достига минимална стойност върху окръжността, разделяща предната и задната полусфери. След това налягането нараства и в най-задната точка B достига същата максимална стойност, както в челната точка A . Поради симетрията, разпределението на налягането върху двете полусфери е еднакво и резултантната на силите на нормален натиск върху кълбото е нула. Тъй като флуидът е идеален, той не действа на тялото с тангенциални сили. Така стигаме до извода, че резултантната сила, с която флуидът действа на кълбото, е нула, т.е. той не оказва съпротивление на движението на тялото.

Граничен слой и откъсване

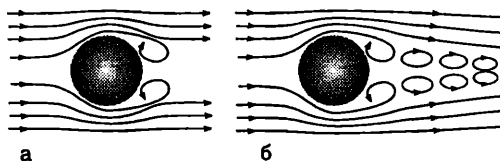
Главната причина за възникване на сили на съпротивление при движение на твърдо тяло във флуид е вискозитетът. Преди да разгледаме тези сили ще се спрем на влиянието на вискозитета върху обтичането на твърдо тяло от флуид. Към повърхността на тялото прилепват частици от вискозния флуид и се образува тънък преходен слой, наречен *граничен слой*, в който скоростта на флуида плавно се изменя от нула върху повърхността на тялото до някаква крайна стойност, характерна за външния поток. Извън граничния слой градиентът на скоростта dv/dy в перпендикулярно на потока направление е нула и съгласно със закона на Нютон (26.2) сили на вътрешно триене не възникват. Следователно вискозитетът на флуида се проявява само в граничния слой. Бихме могли условно да приемем, че твърдото тяло заедно с обвиващия го граничен слой образуват едно ново „ефективно“ тяло, което се обтича от идеален флуид. Налягането върху ефективното тяло, т.е. върху външната повърхност на граничния слой, се изменя по аналогичен начин, както в разглеждания вече пример с кълбото, обтичано от идеален флуид. В челната част налягането е голямо, след това намалява, а в задната част отново нараства. По същия начин се разпределя налягането и в граничния слой. Скоростта на флуида в него обаче е по-



Фиг.27-2.

малка от скоростта на външния флуид. Затова, докато повишаващото се налягане по посока на потока води само до известно намаляване на скоростта на флуида извън граничния слой, то може да преустанови движението на по-бавните частици от граничния слой и дори да ги накара да се движат в обратна посока. На фиг.27-2 схематично е показано разпределението на скоростите в граничния слой. Под линията на нулева скорост възниква обратно течение, което води до нарастване на дебелината δ на граничния слой и до откъсване на потока от твърдото тяло. Точката S , от която започва линията на нулевата скорост, се нарича *точка на откъсване*. С течение на времето масата на флуида, въвлечен в обратното движение, нараства и основният поток се изтласква все по-далеч от повърхността на тялото. Възниква област на турбулентно вихрово движение, която навлиза в обема на флуида. Нейната граница е неустойчива, в определен момент се затваря и тази област се откъсва от повърхността на тялото под формата на *вихър*. Втре във вихъра частиците на флуида извършват въртливо движение. Законът за запазване момента на импулса изисква едновременно да се откъсват по два вихъра, в които частиците да се въртят в противоположни посоки: общият момент на импулса на двата вихъра е нула (фиг.27-3а). След

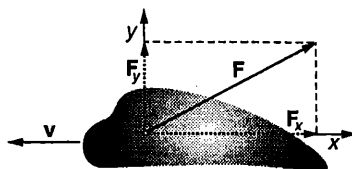
Фиг.27-3.



като се откъснат от тялото, вихрите се отнасят от основния поток, като образуват *вихрова улица* зад него (фиг.27-3б).

Аеродинамични сили

Вискозните флуиди действат на движещи се в тях твърди тела със сили на натиск и на вътрешно триене, разпределени по цялата повърхност на тялото. Резултантната на тези сили се нарича *аеродинамична сила*. Посоката и големината на аеродинамичната сила F зависи от формата и размерите на тялото, от неговата ориентация спрямо посоката на движение, от скоростта и ускорението, от свойствата на флуида и др. Аеродинамичната сила може да се разложи на две компоненти: F_x , насочена обратно на посоката на движение, и F_y – перпендикулярна на посоката на движение (фиг.27-4). Силата F_x се нарича *сила на челно или аеродинамично съпротивление*, а F_y – *аеродинамична подемна сила*.



Фиг.27-4. Аеродинамичната сила F има две компоненти: челно съпротивление F_x и подемна сила F_y .

Определянето на аеродинамичните сили при зададени условия на полета е основната задача на аеродинамиката. В повечето случаи тя се решава експериментално. Аеродинамичните експерименти се извършват в специални аеродинамични тръби и тунели, в които се моделира движението на самолети, ракети, снаряди и др.

Тук ще се ограничим само с качествено разглеждане на причините за възникването на аеродинамични сили и на основните закони, които ги описват.

Челно съпротивление

Два са основните фактори, определящи челното съпротивление при движение със скорости, по-малки от скоростта на звука

във флуида (дозвукови скорости):

1. тангенциалните сили на вътрешно триене;

2. откъсването на потока от повърхността на тялото, водещо до образуване на вихри.

Кой от двата фактора е преобладаващ, зависи от скоростта или по-точно от

числото на Рейнолдс $Re = \frac{v\rho\ell}{\eta}$, където в случая ℓ е характерният размер на тялото, v е скоростта на тялото, а ρ и η както и във формула (26.5) са съответно плътността и вискозитетът на флуида.

При малки скорости ($Re < 1$) вискозитетът на флуида се проявява непосредствено чрез тангенциалните сили на вътрешно триене, които се стремят да забавят тялото. Британският физик Джордж Габриел Стокс (1819–1903) установява, че големината на силата на вътрешно триене F_c е правопропорционална на скоростта на тялото и на вискозитета η на флуида и зависи от размерите и формата на тялото. За сферично тяло с радиус r силата на вътрешно триене е равна на

$$(27.1) \quad F_c = 6\pi\eta rv.$$

Формулата на Стокс (27.1) има разнообразни практически приложения. С нейна помощ например може да се изчисли постоянната скорост v_0 , която достига частица (прашинка, капка и др.) при свободно падане във вискозна среда. Може също така, ако се измери v_0 , да се определи радиусът на частицата.

При увеличаване на скоростта на тялото (при $Re \geq 1$) вискозитетът започва да оказва непряко влияние на челното съпротивление посредством явленията откъсване на потока и образуване на вихри. Тези явления водят до изменение на разпределението на налягането около твърдото тяло: налягането в зоната на турбулентно вихрово движение (вихрова улица) се понижава и възниква резултантна сила на натиск F_x , насочена в противоположна на

(27.2)

$$F_x = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2,$$

където ρ е плътността на флуида, S е площта на проекцията на тялото върху равнина, перпендикулярна на посоката на неговата скорост. C_x е числен коефициент, наречен *коефициент на челно съпротивление*, чиято стойност зависи от формата на тялото. Телата със заоблена и удължена форма (фиг.27-5а) имат малък коефициент на челно съпротивление. Те се обтичат добре от флуида, при което скоростта му се променя плавно и възникващите разлики в налягането са малки. Затова областта, в която става откъсване на потока и се образуват вихри, е изместена в най-задната (стеснена) част на тялото. Вихровата улица е много тясна, поради което челното съпротивление е малко. Обратно, ако тялото е ограничено от остри ръбове (фиг.27-5б), около тях налягането рязко се изменя, което води до интензивни обратни потоци и образуване на вихри: вихровата улица е широка и коефициентът на челно съпротивление е голям.

Силите на вътрешно триене и силите на натиск, които възникват при движение на твърдо тяло във вискозен флуид, водят до необратимо превръщане на кинетичната енергия на тялото във вътрешна енергия. Силите на вътрешно триене в граничния слой непосредствено преобразуват кинетичната енергия в топлинна енергия. Силите на натиск преобразуват част от кинетичната енергия на тялото в кинетична енергия на вихрите, която впоследствие се трансформира във вътрешна енергия и флуидът се загрява. Друг механизъм на дисипация на кинетичната енергия е превръщането ѝ в енергия на ударните вълни, които се създават при движение с много големи (свръхзвукови) скорости. Затова при преминаване на звуковата бариера челното съпротивление рязко нараства.

Фиг.27-5.



Пример 27.1. Определете радиуса r на сферична прашинка, ако тя пада във въздух с постоянна скорост $v_0 = 2$ cm/s. Плътността на прашиката е $\rho = 2.10^3$ kg/m³. Плътността на въздуха е $\rho_0 = 1,2$ kg/m³, а вискозитетът му е $\eta = 1,8.10^{-5}$ Pa·s. Обосновете приложимостта на формулата на Стокс в този случай.

Решение. На прашиката действат три сили: силата на тежестта $G = mg = \rho Vg$, където

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ е обемът на прашиката

та; архимедовата сила $F_A = \rho_0 Vg$;

силата на вътрешно триене, която

се определя по формулата на

Стокс $F_c = 6\pi\eta r v$. Посоките на трите

сили са показани на *фиг.27-6*. Големините на силите G и F_A не

зависят от скоростта, докато големината на силата на съпротивление

F_c нараства линейно със скоростта. Затова отначало скоростта

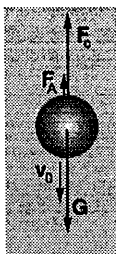
на прашиката нараства, докато се достигне

някаква максимална скорост v_0 , при която

равнодействащата на трите сили става нула.

След това движението продължава с постоянна

скорост v_0 . От условието (*фиг.27-6*)



Фиг.27-6.

$$G = F_A + F_c$$

или

$$\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) g = \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) g + 6\pi\eta r v_0$$

определяме радиуса r на прашиката

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2(\rho - \rho_0)g}} \approx \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2\rho g}} = 9.10^{-6} \text{ m.}$$

Критерий за приложимостта на формулата на Стокс е стойността на числото на Рейнолдс. В случая тя е

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{v_0 \rho_0 r}{\eta} = \\ &= \frac{(0,02 \text{ m/s})(1,2 \text{ kg/m}^3)(9.10^{-6} \text{ m})}{1,8.10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 0,012. \end{aligned}$$

Тъй като числото на Рейнолдс е много по-малко от единица, определящо е съпротивлението на вискозно триене, което се описва с формулата на Стокс.

Подемна сила

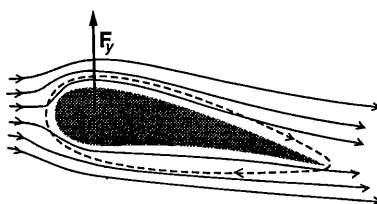
Подемна сила възниква при обтичане на несиметрично тяло, например крило на самолет. Напречното сечение на крилото, показано на *фиг.27-7*, има характерна форма, наречена *профил на Жуковски* в чест на руския учен Николай Егорович Жуковски (1847–1921). Подобно на челното съпротивление, възникването на подемна сила е свързано с наличието на граничен слой. Освен постъпателно движение, частиците от граничния слой извършват и въртливо движение, което е свързано с наличието на градиент на скоростта в граничния слой в перпендикулярно на основния поток направление. Затова движени-



Фиг.27-7.

ето в граничния слой е вихрово. За частиците над крилото преобладава въртенето по посока на часовата стрелка, а за частиците под крилото – въртенето в противоположната посока. При обтичането на несиметрично крило точката на откъсване S се измества в непосредствена близост до заострения край. Откъсването на потока става главно под крилото и в образувания вихър преобладават частиците, въртящи се в противоположната на часовата стрелка посока (*фиг.27-7*). Тъй като в затворената система крило–флуид е в сила законът за запазване момента на импулса, около крилото възниква кръгово движение (циркулация) на флуида от основния поток в противоположната посо-

Фиг.27-8.



ка, т.е. по посока на движението на часовата стрелка (фиг. 27-7). Циркуляционното движение се наслажда към постъпателното движение на потока около крилото, в резултат на което скоростта на флуида v_1 над крилото се оказва по-голяма от скоростта v_2 под него (фиг. 27-8). Съгласно с уравнението на Бернули под крилото се образува област на повишено налягане p_2 , а над него – област на понижено налягане p_1 . Разликата в налягането обуславя появата на вертикална сила на натиск (подемна сила) F_y .

Доказва се, че големината на подемната сила се изразява с аналогично на (27.2) уравнение

$$(27.3) \quad F_y = \frac{1}{2} C_y \rho S v^2,$$

където S е площта на крилото, ρ е плътността на въздуха, v е скоростта на самолета (или скоростта на потока далеч от самолета, когато движението се разглежда в отправна система, в която самолетът е неподвижен). C_y е безразмерен коефициент на подемната сила, който зависи от формата на крилото, от нейната ориентация (от ъгъла, който крилото сключва с хоризонталната равнина, наречен *ъгъл на атаката*) и от числото на Рейнолдс.

Летене на птиците

Ако наблюдаваме излитането на дребните и на едрите птици, ще установим някои съществени различия. Например за малкото връбче е достатъчно да подскочи и след едно-две размахвания на крилата достига необходимата за полета минимална скорост v . Големите птици, например лебедът, отначало размахват криле, като постепенно увеличават скоростта им, докато излетят. Тези особености можем да обясним качествено с помощта на формула (27.3) за подемната сила и метода на подобие (вж. §23).

При хоризонтален полет подемната сила трябва да уравновесява силата на тежестта $G = mg$, където m е масата на птицата. Ако приемем птиците за геометрично подобни, площта S на крилата им е

правопропорционална на характерния размер ℓ на птицата. Следователно подемната сила е $F_y \propto \ell^2 v^2$. От друга страна, силата на тежестта е правопропорционална на масата m , която от своя страна е пропорционална на ℓ^3 . Приравнявайки двете

сили, получаваме $\ell^3 \propto \ell^2 v^2$ или $v \propto \ell^{\frac{1}{2}}$.

Следователно за по-едри птици е необходима по-голяма скорост v за да излетят. Това обяснява защо те отначало махат с крила, стремяйки се да достигнат нужната за излитането минимална скорост.

Задачи

1. Сферична кръвна клетка с радиус $r = 5 \cdot 10^{-6}$ m и плътност $\rho = 1,3 \cdot 10^3$ kg/m³ се намира в затоплена водна среда. Определете постоянната скорост v , с която потъва клетката. Водата има плътност $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3$ kg/m³ и вискозитет $\eta = 0,65 \cdot 10^{-3}$ Pa·s.

2. Парашутист с маса $m_1 = 100$ kg при отворен парашут пада с постоянна скорост $v_1 = 5$ m/s. Каква ще бъде установилата се постоянна скорост v_2 за парашутистка с маса $m_2 = 50$ kg, която скача със същия парашут? Челното съпротивление е пропорционално на квадрата на скоростта.

3. Самолет с маса 10 000 kg трябва да достигне скорост 120 m/s, за да излети. С каква минимална скорост може да излети същият самолет, ако носи допълнителен товар 5000 kg?

4. Минималната скорост на полета на врабче с маса $m_1 = 40$ g е $v_1 = 5$ m/s. Колко е минималната скорост v_2 за лебед с маса $m_2 = 5$ kg? Решете задачата, като използвате два модела на подобие:

а) с един характерен размер ℓ ;

б) с два характерни размера ℓ и r , свързани със съотношението $\ell \propto r^{\frac{1}{2}}$.

5. Даден вертолет може да се издигне нагоре при механична мощност на двигателя P . Каква механична мощност P_1 е необходима за издигането на друг вертолет, който е геометрично подобен на дадения, като всичките му линейни размери са намалени 2 пъти?

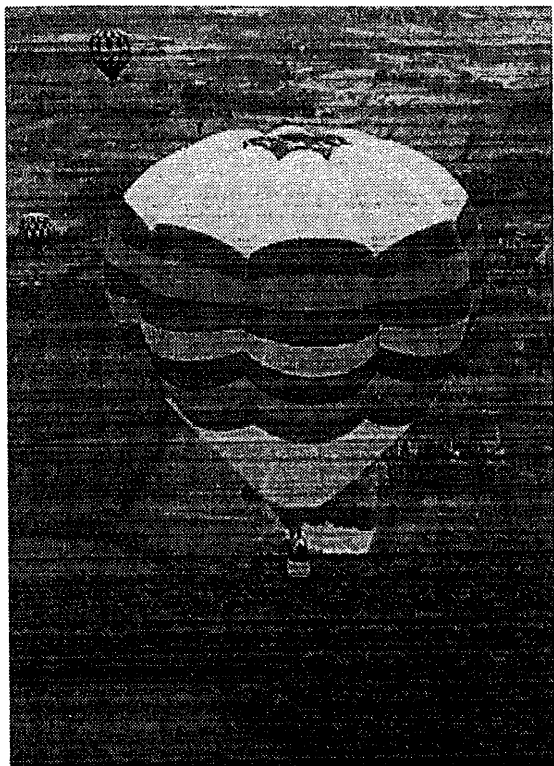
ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛНА ФИЗИКА

Термодинамиката и молекулната физика изучават явленията, свързани с хаотичното топлинно движение на молекулите на макроскопичните тела и системи. Независимо че имат общ обект за изследване – макросистемите, изградени от огромен брой частици (атоми и молекули), те използват различни подходи и методи. Термодинамиката не се интересува от атомно-молекулния строеж на веществото и разглежда макросистемите като непрекъснати среди, които характеризира с макроскопични признаци (параметри), чиито стойности могат да се измерят експериментално.

Термодинамичният подход се основава на три фундаментални закона (принципи на термодинамиката), които са обобщение на натрупаните от науката експериментални факти.

Задача на молекулната физика е да обясни макроскопичните признаци, свойства и явления, които се измерват или наблюдават експериментално (например налягане, температура, топлопроводност, промяна в агрегатните състояния и т.н.), като сумарен резултат от вътрешното движение и взаимодействие на молекулите. Молекулната физика не разглежда индивидуалното движение на отделните молекули, а използва статистически методи, за да определи такива средни величини, които характеризират цялата съвкупност от хаотично движещи се молекули. Термодинамичните и статистическите методи взаимно се допълват, поради което често ще ги използваме съвместно за описване свойствата на макросистемите.

Идеалният газ като най-проста термодинамична система



В тази глава ще разгледаме най-важните характеристики на термодинамичните системи, тяхното равновесно състояние и взаимодействие с околната среда. Ще изложим основните резултати на термодинамиката за най-простата система – идеалния газ, всички свойства на която се описват само от един външен параметър (обема) и от температурата.

28. Термодинамично равновесие и температура

Макроскопична система и параметри

Под макроскопична система се разбира всяко тяло или съвкупност от тела, които са съставени от много голям, но все пак краен брой частици. Човешкото тяло, което е изградено от около 10^{16} клетки, е пример за макросистема. Дори отделната клетка, която съдържа около $10^{12} - 10^{14}$ атома, също може да се разглежда като макроскопична система. Величините, които характеризират вътрешното състояние на една макросистема и нейното отношение към околната среда, се наричат *макроскопични параметри*. Те се разделят на две групи: *вътрешни параметри* и *външни параметри*. Външните параметри a_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) зависят от положението на външните за системата тела. Например обемът на газа е външен параметър, който се определя от положението на стените на съда (външно тяло). Земното ускорение е външен параметър за макросистема, намираща се в гравитационното поле на Земята и т.н. Вътрешните параметри b_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) се определят от положението и движението на влизащите в системата тела и частици. Примери за вътрешни параметри са налягането, плътността, енергията на топлинно движение и др.

Съвкупността от независимите външни и вътрешни параметри задава *състоянието* една макросистема. Величините, чиито стойности еднозначно се определят от състоянието на системата, т.е. от нейните параметри, се наричат *функции на състоянието*.

Една макроскопична система се намира в състояние на *термодинамично равновесие*, ако нейните параметри не се изменят с течение на времето и в системата не съществуват макроскопични стационарни потоци, поддържани от външни източници (например ламинарно течение на флуид). По-нататък *термодинамични системи* ще наричаме само такива макроскопични системи, които се намират в състояние на термодинамично равновесие или

се доближават до него.

Постулати на термодинамиката

Като макроскопична теория термодинамиката се основава на два постулата и три основни закона (принципа), които са обобщение на опита.

Първи постулат: *За всяка изолирана система (система, която не обменя енергия и вещество с околната среда) съществува състояние на термодинамично равновесие, което тя достига с течение на времето и не може самопроизволно да излезе от него.*

Формулираният постулат може да се обоснове, като се използват методите на молекулната (статистическа) физика. Статистическата физика доказва, че от всички възможни състояния на една макросистема най-вероятно е равновесното състояние, което се характеризира с най-голям безпорядък (хаотичност) в движението и положението на частиците. Равновесното състояние се реализира по възможно най-много начини и вероятността системата спонтанно да премине в друго, по-подредено състояние, е пренебрежимо малка.

Чрез втория постулат се въвежда величината температура, която характеризира състоянието на вътрешно движение в една равновесна система. Опитът показва, че ако две равновесни системи A и B се приведат в топлинен контакт, независимо от стойностите на техните външни параметри, в едни случаи равновесието се запазва, а в други то се нарушава – започват процеси на обмен на енергия (топлообмен), в резултат на които се достига до ново равновесно състояние. Освен това за термодинамичното равновесие е характерно свойството *транзитивност*: ако системите A и B поотделно се намират в равновесие със системата C , то при контакт те ще се намират в равновесие и помежду си.

Следователно за характеризиране на равновесното състояние освен външните параметри е необходима още една величина, която се нарича температура. При контакт между две термодинамични системи равновесието не се нарушава, ако

те имат еднакви температури. Свойството транзитивност позволява да се сравняват температурите на две системи без те да се привеждат в контакт. За целта се използва трето тяло, наречено термометър, което последователно се привежда в контакт с двете системи.

Ако при контакт между две равновесни системи равновесието се наруши, повисока температура има системата, която отдава енергия при настъпилния топлообмен. След топлообмена се установява ново равновесно състояние, което се характеризира с една и съща температура за двете системи.

Температурата е мярка за интензивността на топлинното движение. Тя е вътрешен параметър, който има една и съща стойност за всички части на една равновесна система. Останалите вътрешни параметри зависят от температурата и от външните параметри.

Втори постулат: *Равновесните вътрешни параметри на една термодинамична система са функции на външните параметри и температурата.*

Твърдението, че топлинното движение в равновесните системи се характеризира със специална величина, наречена температура, понякога се формулира като *нулев принцип* на термодинамиката.

Живачен (спиртен) термометър

Свойството транзитивност на термодинамичното равновесие позволява да се сравнява температурата на две тела без те да се привеждат в контакт едно с друго. За целта се използва трето тяло, наречено термометър. Термометърът съдържа термометрично вещество, което се привежда в топлинен контакт с тялото, чиято температура се измерва. За индикатор на температурата служи някой от параметрите на термометричното вещество, например обем или налягане, който се нарича термометрична величина.

На *фиг.28-1* е показан известният от всекидневието термометър, при който термометричното вещество е течност (спирт или живак), която запълва тънка стъклена тръбичка, завършваща със сферичен резервоар. Термометричната величина е

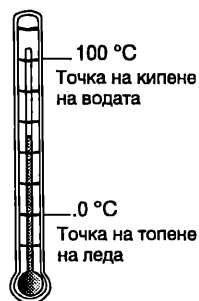
обемът на течността. Термометърът се градуира по температурната скала на Целзий, която използва две реперни точки: температурите на топене на леда (0°C) и на кипене на водата (100°C) при нормално атмосферно налягане (101 325 Pa).

Термометърът се поставя в равновесие с топящ се лед и се отбелязва равнището на течността в тръбичката, което съответства на температура 0°C . След това термометърът се поставя в контакт с кипеща вода и след като се установи топлинно равновесие се отбелязва равнището на течността, съответстващо на температура 100°C . Разстоянието между двата белега се разделя на 100 равни части, всяка от които отговаря на 1°C .

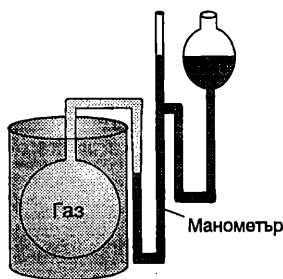
При описания начин на градуиране показанията на два термометъра, използващи различни течности, съвпадат напълно само в реперните точки, а се различават при всички останали температури. Например, ако с живачен термометър измерим, че температурата на чаша с вода е 50°C , то спиртен термометър, потопен в същата чаша, ще покаже $49,5^{\circ}\text{C}$. Съвсем странни биха били показанията на термометър, който използва вода за термометрично вещество. При 4°C , където плътността на водата е максимална, водният термометър би показал отрицателна температура. Причината е в нелинейния характер на зависимостта на термометричната величина от температурата. Например законите, по които се изменя обемът на водата, спирта и живака при нагряване, са различни и затова показанията на термометрите зависят от избора на термометричното вещество. Тази нееднозначност в определянето на температурата почти напълно се отстранява, ако за термометрично вещество се използва достатъчно разреден (идеален) газ.

Газов термометър

На *фиг.28-2* е показана опростена схема, илюстрираща принципа на действие на



Фиг.28-1.



Фиг.28-2. Газов термометър.

газовия термометър. Запълнен с газ балон е свързан към отворен живачен манометър. Обемът на газа се поддържа постоянен, а за термометрична величина се избира налягането, което се измерва с манометъра. Газовият термометър използва само една реперна точка. За такава се избира тройната точка на водата. Тройна точка се нарича температурата, при която трите фази на водата – лед, течност и пара, са в равновесие помежду си (вж. §41). На тройната точка на водата съответства температура $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$. Тази реперна точка е предпочетена пред температурите на кипене и замръзване на водата, тъй като може да се възпроизвежда с много по-голяма точност ($\pm 0,00008\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Да означим с T_r температурата на тройната точка на водата, а с p_r налягането на газа, когато се намира при тази температура. Газовият термометър се потапя в съд с нагрята течност (например кипяща вода). Когато се установи топлинно равновесие, манометърът показва някакво ново (по-високо) налягане p на газа. Тогава температурата на течността може да се определи чрез отношението на двете стойности на налягането

$$(28.1) \quad \frac{T}{T_r} = \frac{p}{p_r}.$$

Опитът показва, че ако се използват различни газове (например водород, азот и кислород) при високо начално налягане p_r , отношението p/p_r е различно за различните газове. Ако се намалява масата m на газа в балона, стойността на това отношение започва все по-слабо да зависи от вида на газа и в граничния случай

на силно разреден газ (когато масата m на газа клони към нула) то е практически еднакво за всички газове. На фиг.28-3 са показани резултати от измерванията на отношението p/p_r за три различни газа. Вижда се, че

$$(28.2) \quad \lim_{m \rightarrow 0} \frac{p}{p_r} = \text{const.}$$

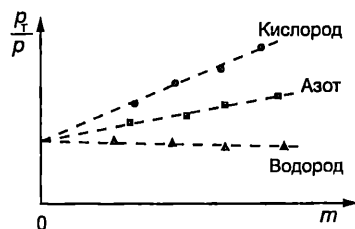
Следователно температурата T , съответстваща на налягане p , може да се определи еднозначно, независимо от вида на газа, с който работи газовият термометър, по формулата

$$(28.3) \quad T = T_r \lim_{m \rightarrow 0} \frac{p}{p_r}.$$

По определение се приема, че температурата на тройната точка на водата е $T_r = 273,16\text{ K}$. При такава стойност на T_r скалата на газовия термометър съвпада с абсолютната термодинамична температурна скала (скала на Келвин), която изобщо не зависи от избора на термометричното вещество и се въвежда въз основа на втория принцип на термодинамиката.

Освен това, когато се приеме $T_r = 273,16\text{ K}$, запазва се разликата от 100 градуса между температурите на топене на леда и на кипене водата при нормално налягане. По този начин газовата термометрична скала, както и абсолютната термодинамична скала на Келвин, се различава от скалата на Целзий само по положението на нулата, докато големината на един градус в двете скали съвпада. Прието е температурата, когато се измерва в градуси Целзий, да се означава с $t\text{ }(^{\circ}\text{C})$, а когато е измерена в келвини (K), да се означава с T . Връзката между двете температурни скали е

Фиг.28-3.

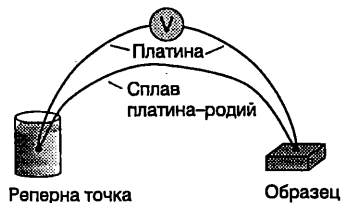


(28.4) $T = t + 273,15 \text{ K}$,
където 273,15 K е температурата на топе-
не на леда при нормално налягане (0 °C
съответства на 273,15 K).

Международна практическа темпера- турна скала

Независимо че принципът на действие на газовия термометър е много прост, сами-
ят термометър представлява едно изключи-
телно сложно и скъпо струващо съоръ-
жение, с каквото са снабдени само отдел-
ни метрологични центрове в света. Освен
това прецизните измервания с газов тер-
мометър се извършват много бавно и по-
някога продължават с месеци. Затова се
използват други, по-бързи и по-евтини ме-
тоди за точно измерване на температура-
та. За целта е създадена *практическа*
температурна скала, приета от Междуна-
родния комитет по мерки и теглилки през
1968 година. Международната практическа
температурна скала от 1968 година (МПТС-68) се основава на набор от репер-
ни точки (вж. таблица 28.1), чиито стойно-
сти са определени с максималната въз-
можна точност с помощта на газови тер-
мометри.

Освен реперните точки МПТС опреде-
ля процедури за получаване на междин-
ните температури. Ниските температури
се измерват с полупроводникови (герма-
ниеви) съпротивителни термометри, а в



Фиг.28-4. Измерване на температура с тер-
модвойка.

интервала на средните температури се из-
ползват платинови съпротивления и тер-
модвойки платина-сплав платина и родий.
Високите температури се измерват с оп-
тически пирометри.

В съпротивителните термометри се
използва фактът, че електричното съпро-
тивление (термометрична величина) на
чистите метали и полупроводници се из-
меня с температурата по закони, които са
възпроизводими с висока точност. На-
чинът за измерване на температура с тер-
модвойка се илюстрира от *фиг.28-4*. Два-
та края на проводници, направени от раз-
лични метали или метални сплави, се за-
появат един към друг. След това единият
проводник се разрязва и се свързва към
чувствителен волтметър. Едната спойка се
поставя при температура T_{68} , съответства-
ща на някоя от реперните точки, а друга-
та – при температурата T , която трябва да
се измери. Когато двете спойки се нами-
рат при различни температури, възниква

Таблица 28.1. Реперни точки в Международната практическа температурна ска-
ла (МПТС-68).

Равновесно състояние	T_{68}, K	$t_{68}, ^\circ\text{C}$
Тройна точка на водорода	13,81	-259,34
Точка на кипене на водорода при налягане $\frac{25}{76} \text{ atm}$	17,042	-256,108
Точка на кипене на водорода при налягане 1 atm	20,28	-252,87
Точка на кипене на неона при налягане 1 atm	27,402	-246,048
Тройна точка на кислорода	54,361	-218,789
Точка на кипене на кислорода при налягане 1 atm	90,188	-182,962
Тройна точка на водата	273,16	0,01
Точка на кипене на водата при налягане 1 atm	373,15	100
Точка на втвърдяване на цинка	692,73	419,58
Точка на втвърдяване на среброто	1235,08	961,93
Точка на втвърдяване на златото	1337,58	1064,43

т. нар. *термоелектродвижещо напрежение*, чиято големина по достатъчно точно възпроизводим начин нараства при увеличаване на температурната разлика $\Delta T = T - T_{\text{вс}}$. Термоелектродвижещото напрежение се измерва с волтметър и по градуировката, която е приложена към паспорта на всяка стандартна термодвойка, се изчислява температурата.

Равновесни и неравновесни процеси

Когато някои от параметрите на една макросистема се изменят с течение на времето, казва се, че в системата протича процес. Например, ако обемът на дадено количество газ нараства, протича процес на разширение на газа, при който освен обемът могат да се изменят налягането, температурата, енергията и други параметри на газа. Един процес е *равновесен*, ако може да се представи като последователност от равновесни състояния, т.е. когато параметрите на системата се променят толкова бавно, че можем във всеки момент от времето да смятаме, че системата се намира в равновесно състояние. Равновесните процеси се описват със същия набор от параметри, както равновесното състояние. Ще обърнем внимание, че не всички много бавни процеси са равновесни. Например при определени условия топлообменът между две тела може да се извършва много бавно, но такъв процес никога не е равновесен, защото различните части от телата се намират при различна температура – докато се извършва топлообмен, системата от две тела не е в топлинно равновесие.

Описването на неравновесните процеси е много по-сложно. Примери за силно неравновесни процеси са разширението на газ във вакуум, турбулентното движение на течност, метаболизмът в клетките на живите организми и др. Неравно-

весни са и процесите на релаксация, чрез които една изолирана система преминава в равновесно състояние. В действителност всички реални процеси са неравновесни – те протичат с крайни скорости, при което се нарушава равновесието. В много случаи обаче реалните процеси с приближение могат да се разглеждат като равновесни. Изучаването на равновесните процеси е важно и за това, че при тях редица величини достигат своите максимални стойности. При равновесен процес една система върши максимална работа, а топлинните машини имат максимален коефициент на полезно действие. Затова чрез анализ на равновесните процеси се определя горната граница за параметрите на топлинните машини, което има голямо практическо значение.

Задачи

1. В англоезичните страни широко се използва температурната скала на Фаренхайт. Пресмятането на температурата t_F в градуси Фаренхайт ($^{\circ}\text{F}$), когато е известна температурата t_C в градуси Целзий ($^{\circ}\text{C}$), става с помощта на формулата

$$t_F = \frac{9}{5} t_C + 32.$$

а) Колко градуса Фаренхайт са температурите на топене на леда и на кипене на водата?

б) При каква температура термометрите, градуирани по двете скали, ще показват еднакви стойности?

в) Нормалната телесна температура на човека е $36,8^{\circ}\text{C}$. Представете тази температура в келвини и в градуси Фаренхайт.

г) Най-ниската температура на Земята е измерена в Сибир (-71°C), а най-високата температура е измерена в Калифорния (134°F). Определете разликата между двете температури по скалите на Целзий, Келвин и Фаренхайт.

29. Закони при идеален газ

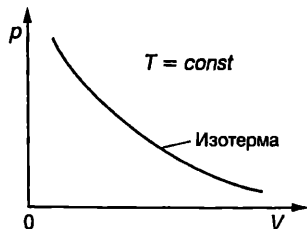
Закон на Бойл–Мариот

Уравнение (28.3), което се използва при измерване температурата с газов термометър, обединява два емпирични закона, формулирани много преди да се създаде техниката на газовата термометрия. Първият закон е открит от ирландския химик и физик Роберт Бойл (1627–1691) през 1662 година. До същия резултат по самостоятелен път през 1676 година достига и френският физик Едмѐ Мариот (1620–1684). Законът на Бойл–Мариот гласи:

Налягането p на газовете при постоянна температура е обратнопропорционално на техния обем V .

$$(29.1) \quad p = \frac{\text{const}}{V} \quad \text{или} \quad pV = \text{const}.$$

На pV -диаграма, която изразява графично зависимостта на налягането p на газа от неговия обем V , законът на Бойл–Мариот се представя с хипербола (фиг.29-1), която е прието да се нарича *изотерма*.



Фиг.29-1. Закон на Бойл–Мариот.

Закон на Шарл (Гей–Люсак)

Вторият емпиричен закон е открит през 1787 г. от френския физик Жак Шарл (1746–1823). До същия резултат по независим път достига и съотечественикът му Джоузеф Гей–Люсак (1778–1850), който пръв публикува резултатите от своите измервания през 1802 година. Законът на Шарл (във Франция този закон се нарича закон на Гей–Люсак) гласи:

При постоянно налягане ($p = \text{const}$) обемът на газовете нараства по линейен закон с температурата.

Когато температурата на газа се измерва в келвини, законът на Шарл се изразява с уравнението

$$(29.2) \quad V = \text{const} \cdot T \quad \text{или} \quad \frac{V}{T} = \text{const}.$$

Опитът показва, че за реалните газове законите на Бойл–Мариот и на Шарл са само приблизително верни. Колкото по-голямо е налягането на реалния газ, толкова по-силни отклонения от тези закони се наблюдават. Газове, за които законите на Бойл–Мариот и на Шарл точно се изпълняват при всяко налягане и температура, се наричат *идеални газове*. Свойствата на силно разредените газове са много близки до свойствата на идеалния газ. За тях зависимостите (29.1) и (29.2) се изпълняват с висока точност. При умерени условия (например стайна температура и атмосферно налягане) отклоненията на реалните газове от законите за идеалния газ са малки и в повечето случаи могат да не се отчитат.

Ще отбележим, че ако термометричното вещество на газовия термометър беше идеален газ, той щеше да показва термодинамичната температура при произволно налягане. Затова описаната в §28 газова температурна скала се нарича също скала на идеален газов термометър.

Закон на Авогадро

През 1811 година италианският учен Амадео Авогадро (1776–1856) изказва хипотезата, че в равни обеми газ при еднаква температура T и налягане p се съдържат еднакъв брой молекули, независимо от химическия състав на газа. Това предположение, известно като *закон на Авогадро*, се потвърждава експериментално за всички достатъчно разредени газове. Законът на Авогадро се изпълнява абсолютно точно за идеален газ, а за реалните газове при нормални условия той е само приблизително верен.

Една от основните единици в Международната система (SI) е за количество ве-

щество и се нарича мол (mol). Генералната конференция по мерки и теглилки през 1971 година дава следното определение на единицата mol: „1 mol е количеството вещество на системата, съдържаща толкова структурни елемента, колкото атома се съдържат в 0,012 kg от изотопа въглерод-12 (^{12}C). При използване на мола видът на структурните елементи трябва да бъде определен и може да бъде атоми, молекули, йони, електрони или други частици или определени групировки от тях“.

Посредством единицата mol може да се даде друга формулировка на закона на Авогадро: 1 mol от всяко вещество в газово състояние при постоянна температура T и налягане p , при условие че газът може да се смята за идеален, заема точно определен обем. При нормални условия ($p = 101\,325\text{ Pa}$ и $T = 273,15\text{ K}$) моларният обем на всички идеални газове е

$$V_M = 22,413\,83 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3/\text{mol}.$$

Броят на структурните елементи (атоми, молекули, йони или други частици) в 1 mol е наречен в чест на Авогадро *число на Авогадро* и се означава с N_A . Един от най-точните експериментални методи за определяне стойността на числото на Авогадро се основава на измерването на електричния заряд, необходим за електролитно разлагане на известен брой молекули от сложно вещество. Най-точната получена досега стойност на числото на Авогадро е

$$N_A = (6,022\,136\,7 \pm 0,000\,003\,6) \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}.$$

Забележка. Ще обърнем внимание, че N_A е физична константа, която има размерност mol^{-1} (mol на минус първа), затова е правилно да се нарича *константа на Авогадро*, а не число на Авогадро. Ние обаче ще използваме термина число на Авогадро, тъй като той трайно се е наложил в учебната и научната литература.

Пример 29.1. Определете броя на молекулите, които се съдържат в 1 m^3 въздух при нормални условия.

Решение. Съгласно със закона на Авогадро обемът на 1 mol идеален газ при нормални условия е $V_M = 22,4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3/\text{mol}$. В обем $V = 1\text{ m}^3$ въздух, разглеждан като идеален газ, има

$$n = \frac{V}{V_M} = \frac{1\text{ m}^3}{22,4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3/\text{mol}} = 44,6\text{ mol}.$$

Броят на молекулите в такова количество газ е

$$N = nN_A = (44,6\text{ mol})(6,02 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}) = 2,68 \cdot 10^{25}.$$

Уравнение за състоянието на идеален газ

Термодинамична система, която се описва само от един независим външен параметър, се нарича *проста система*. Съгласно с втория постулат на термодинамиката всички равновесни вътрешни параметри са функции на външните параметри и на температурата. Следователно налягането p (вътрешен параметър) за проста система се определя единствено от външния параметър обем (V) на системата и от температурата T

$$(29.3) \quad p = p(V, T).$$

Уравнение (29.3) се нарича *уравнение за състоянието на термодинамичната система*. Неговото извеждане излиза извън рамките на термодинамиката. То може да бъде получено експериментално или с помощта на методите на молекулната физика.

За идеалния газ, който е пример за проста система, уравнението за състоянието се получава като обобщение на трите експериментални закона на Бойл–Мариот, Шарл и Авогадро. Такова обобщение е направено за пръв път през 1834 година от френския физик Б.П.Е. Клапейрон (1799–1864), а в 1874 година руският химик Дмитри Иванович Менделеев (1834–1907) извежда уравнението за състоянието на 1 mol идеален газ. Уравнението на Клапейрон–Менделеев за състоянието на произволно количество идеален газ се записва във вида

$$(29.4) \quad pV = \frac{m}{M}RT = nRT,$$

където m е масата на газа, M е моларната му маса, $n = m/M$ е броят на молекулите, а R е *универсалната газова константа*. Най-точната измерена досега стойност на универсалната газова константа е

$$R = (8,314\,510 \pm 0,000\,070) \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

Пример 29.2. В цилиндър с бутало се намира идеален газ с обем $V_1 = 2.10^{-3} \text{ m}^3$, налягане $p_1 = 5.10^5 \text{ Pa}$ при температура $T_1 = 300 \text{ K}$. Газът се разширява докато достигне обем $V_2 = 4.10^{-3} \text{ m}^3$. Определете крайната температура T_2 на газа, ако налягането е $p_2 = 3.10^5 \text{ Pa}$.

Решение. Тъй като количеството на газа (броят на моловете n) не се изменя по време на процеса, уравнението на Клапейрон–Менделеев за началното и за крайното състояние на газа се записва във вида

$$p_1 V_1 = nRT_1 \text{ и } p_2 V_2 = nRT_2.$$

Изключваме nR и от двете уравнения получаваме

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Записано в този вид, уравнението за състоянието на идеалния газ е удобно да се използва при решаване на задачи, в които не е дадено количеството на газа, но е известно, че то е постоянно, а освен това се знае как се изменят два от параметрите на газа. В конкретната задача е известно как се изменят налягането и обема на газа и се търси неговата температура в крайното състояние. От горното уравнение изразяваме T_2 и получаваме

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \\ &= 300 \text{ K} \frac{(3.10^5 \text{ Pa})(4.10^{-3} \text{ m}^3)}{(5.10^5 \text{ Pa})(2.10^{-3} \text{ m}^3)} = 360 \text{ K}. \end{aligned}$$

Закон на Далтон

През 1801 година британският физик и химик Джон Далтон (1766–1844) установява експериментално, че налягането на смес от химически невзаимодействащи идеални газове е равно на сумата от техните парциални налягания (*закон на Далтон*)

$$(29.5) \quad p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N = \sum_{i=1}^N p_i,$$

Парциално се нарича налягането, което би имал даде газ, ако при същата температура T сам заемаше целия обем V , предоставен на газовата смес. Да означим с n_i броя на моловете на i -тия газ. Неговото парциално налягане p_i удовлетворява уравнението за състоянието

$p_i = \frac{n_i RT}{V}$. Сумираме аналогичните равенства за всички газове от сместа и съгласно със закона на Далтон получаваме

$$(29.6) \quad p = \sum_{i=1}^N p_i = \left(\sum_{i=1}^N n_i \right) \frac{RT}{V} = n \frac{RT}{V},$$

където $n = \sum_{i=1}^N n_i$. Следователно смес от хи-

мически невзаимодействащи идеални газове удовлетворява същото уравнение за състоянието, както химически еднороден идеален газ.

Пример 29.3. В съд с обем $V = 0,1 \text{ m}^3$ се намира газова смес от $m_1 = 0,28 \text{ kg}$ азот и $m_2 = 0,64 \text{ kg}$ кислород. Определете налягането на газовата смес при температура $t = 27^\circ \text{C}$. Молярната маса на азота (N_2) е $M_1 = 0,028 \text{ kg/mol}$, а на кислорода (O_2) е $M_2 = 0,032 \text{ kg/mol}$.

Решение. В съда се съдържат

$$n_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{0,28 \text{ kg}}{0,028 \text{ kg/mol}} = 10 \text{ mol азот и}$$

$$n_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{0,64 \text{ kg}}{0,032 \text{ kg/mol}} = 20 \text{ mol кислород}.$$

Количеството вещество на газовата смес е $n = n_1 + n_2 = 30 \text{ mol}$. Налягането на газовата смес определяме от уравнение (29.6)

$$\begin{aligned} p &= \frac{nRT}{V} = \\ &= \frac{(30 \text{ mol})(8,3 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{0,1 \text{ m}^3} = 7,5.10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Ще обърнем внимание, че в уравнението за състоянието на идеалния газ температурата е в келвини, затова преди да направим числените пресмятания превърнахме дадената в условието на задачата числена стойност на температурата от градуси Целзий в келвини.

Задачи

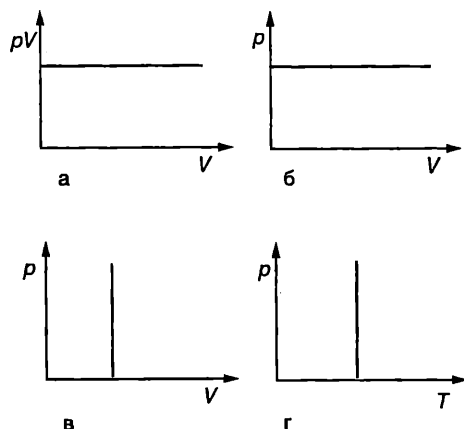
1. Като използвате уравнението за състоянието на идеален газ, докажете, че плътността на газа се изразява с уравнението

$$\rho = \frac{pM}{RT},$$

където p е налягането на газа, M – моларната му маса, R – универсалната газова константа, а T е температурата на газа.

Пресметнете плътността на въздуха при стайна температура ($T = 300\text{ K}$) и атмосферно налягане ($p = 1.10^5\text{ Pa}$). Моларната маса на въздуха е $M = 0,029\text{ kg/mol}$.

2. Кои закони при идеалния газ са представени графично на *фиг.29-2*?



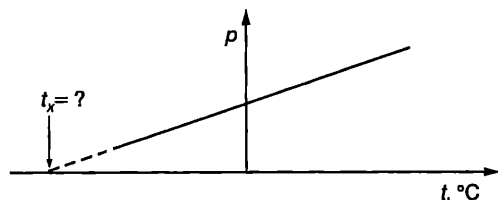
Фиг.29-2.

3. Кой от законите при идеалния газ е представен графично на *фиг.29-3*? Колко градуса Целзий е температурата t_x ?

4. Стъкленият балон на електрическа крушка с нагреваема жичка се запълва с инертен газ при температура $t_1 = 150\text{ }^\circ\text{C}$. До какво налягане трябва да се напълни балонът, така че при температура на газа $t_2 = 300\text{ }^\circ\text{C}$, която се установява, когато крушката свети, налягането на му да не надминава атмосферното налягане 1.10^5 Pa ?

5. Колко молекули се съдържат в 1 cm^3 въздух при стайна температура (300 K) и атмосферно налягане (1.10^5 Pa)?

Фиг.29-3.



6. В съвременна лабораторна постановка, която работи при свръхвисок вакуум, налягането на газа във вакуумната камера е 5.10^{-13} Pa . Колко молекули се съдържат в 1 cm^3 от такъв газ при температура 300 K ?

7. Въздухът в стая с обем 50 m^3 се намира при температура $27\text{ }^\circ\text{C}$. Колко допълнителни молекули въздух ще влязат в стаята, ако температурата се понижи с 5 градуса? Атмосферното налягане да се приеме за постоянно и равно на 1.10^5 Pa .

8. Метален контейнер съдържа 500 g амоняк (NH_3) с налягане 2.10^5 Pa при температура $37\text{ }^\circ\text{C}$. В контейнера има малка дупка, през която изтича газ. След известно време е установено, че температурата на газа е $17\text{ }^\circ\text{C}$, а налягането е $1,6.10^5\text{ Pa}$. Колко грама амоняк са изтекли от контейнера?

9. 1 mol сух въздух съдържа $0,78\text{ mol}$ азот (N_2), $0,21\text{ mol}$ кислород (O_2), $0,009\text{ mol}$ аргон (Ar), $0,0004\text{ mol}$ въглероден диоксид (CO_2) и следи от други газове. Пресметнете парциалните налягания на азота, кислорода, аргона и въглеродния диоксид, когато въздухът се намира при налягане 1 atm .

10. Човек получава кислородно отравяне, когато парциалното налягане на кислорода във въздуха, който диша, достигне $0,8\text{ atm}$. На каква максимална дълбочина водолаз може да използва обикновен въздух за дишане? Хидростатичното налягане на водата нараства с 1 atm на всеки $10,3\text{ m}$ дълбочина.

Указание: Налягането на въздуха, който диша водолазът, трябва да е равно на външното налягане. Използвайте резултата от зад.9.

11. При нормални условия 1 mol въздух съдържа $0,21\text{ mol}$ кислород. Какво би трябвало да е съдържанието на кислород във въздуха на голяма надморска височина, където атмосферното налягане е $0,6\text{ atm}$, за да има там кислородът същото парциално налягане, както във въздуха на морското равнище?

12. Дадено количество идеален газ, което първоначално се намира при температура 300 K , започва да се разширява по закона $pV^{3/2} = \text{const}$. Определете температурата на газа, когато обемът му нарасне 4 пъти.

13. Идеален газ извършва равновесен процес, който се описва с уравнението $p = p_0 - cV^2$, където p_0 и c са положителни константи, а V е моларният обем на газа. Определете максималната температура, до която може да достигне газът при този процес.

30. Първи принцип на термодинамиката

Вътрешна енергия

Всяка термодинамична система се състои от огромен брой частици, които се намират в непрекъснато движение и взаимодействие. Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на всички частици определя пълната енергия на системата. Тя се разделя на външна и вътрешна енергия. Външната енергия включва кинетичната енергия на движение на системата като едно цяло, както и потенциалната ѝ енергия в полето на външни сили. Енергията на хаотичното топлинно движение на молекулите (постъпателно движение, въртливо движение и трептене), потенциалната енергия на междумолекулно взаимодействие, а също така вътрешномолекулната, атомната и ядрената енергия определят вътрешната енергия на термодинамичната система.

Термодинамиката изучава вътрешната енергия на термодинамичните системи и главно тази нейна част, която характеризира хаотичното топлинно движение на молекулите. Вътрешната енергия U е равновесен термодинамичен параметър, който съгласно с втория постулат на термодинамиката е функция от външните параметри и температурата. За простата система

$$(30.1) \quad U = U(V, T),$$

където обемът V е единственият външен параметър на простата система. За всички „обичайни“ системи вътрешната енергия неограничено нараства при неограничено нарастване на температурата. Само ще отбележим съществуването на специални системи, например съвкупността от ядрените спинови магнитни моменти на някои кристали, където вътрешната енергия кло̀ни към някаква крайна граница при неограничено нарастване на температурата. Такива системи тук няма да разглеждаме.

Работа

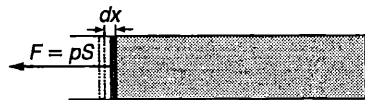
Съществуват два различни начина за обмен на енергия между една термодина-

мична система и заобикалящата я среда. Единият начин е чрез извършване на механична (макроскопична) работа, който е свързан с изменение на външните параметри (на обема за проста система). Вторият начин е чрез топлообмен, когато системата се намира в топлинен контакт с друго (по-нагрятото или по-студено) тяло.

Да разгледаме газ, който се намира в цилиндър с подвижно бутало (фиг.30-1). Газът действа на буталото със сила $F = pS$, където S е площта на буталото, а p е налягането на газа. Нека буталото се придвижва много (безкрайно) бавно, така че процесът на разширение на газа да е равновесен. За безкрайно малкото преместване dx на буталото налягането p не се променя. Елементарната работа за това преместване е $\delta A = Fdx = pSdx$ или

$$(30.2) \quad \delta A = p dV,$$

където $dV = Sdx$ е изменението на обема на газа.



Фиг.30-1.

Уравнението (30.2) за елементарната работа остава в сила при равновесно изменение на обема на всяка термодинамична система. Съгласно с третия принцип на механиката термодинамичната система и околната среда си взаимодействат с равни по големината и противоположни по посока сили. Следователно външните тела също извършват работа $\delta A'$ върху системата, която винаги е равна по големина и противоположна по знак на работата δA , извършена от системата върху външните тела

$$(30.3) \quad \delta A = -\delta A'.$$

Когато обемът на системата нараства ($dV > 0$), тя извършва положителна работа върху околните тела ($\delta A > 0$), а околните тела вършат отрицателна работа ($\delta A' < 0$) върху системата. Обратно, при свиване обемът на системата намалява ($dV < 0$) и нейната работа е отрицателна. В този случай положителна е работата на външните сили, които предизвикват намаляването на

обема на системата.

За да се определи работата, която една термодинамична система извършва при преминаване чрез равновесен процес от състояние 1 в състояние 2, трябва да се изчисли интегралът

$$(30.4) \quad A = \int_1^2 p dV.$$

Това е възможно, ако аналитично е зададено налягането p като функция от обема V . Освен от обема обаче налягането зависи и от температурата. Затова от началното състояние 1 може да се премине в крайното състояние 2 по безкрайно много начини, в зависимост от това, как се изменя температурата по време на прехода. Следователно работата A , пресметната по формула (30.4), зависи не само от началното и от крайното състояние на системата, но и от процеса, чрез който се извършва преходът.

И така, за разлика от вътрешната енергия, работата не е функция на състоянието. Тя не характеризира състоянието на една термодинамична система, а процесите чрез които системата преминава от едно състояние в друго.

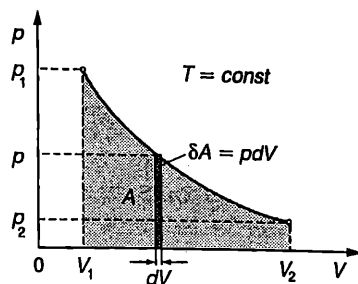
Доказва се, че работата $A_{\text{нерав.}}$, която една система извършва при преминаване от дадено равновесно състояние 1 в някакво друго равновесно състояние 2 чрез неравновесен процес, винаги е по-малка от работата A , която би извърши системата, ако същият преход се осъществи чрез равновесен процес (теорема за максималната работа при равновесните процеси)

$$(30.5) \quad A_{\text{нерав.}} < A.$$

Пример 30.1. Идеален газ се разширява изотермно (при постоянна температура T) от състояние 1 с налягане p_1 и обем V_1 до състояние 2 с налягане p_2 и обем V_2 . Определете работата A на газа, ако количеството му е n мол.

Решение. На pV -диаграмата от фиг.30-2 е показана изотермата, описваща процеса на разширение на газа. Елементарната работа $\delta A = p dV$ се представя графично с площта на правоъгълника със страни dV и p (фиг.30-2).

От уравнението на Клапейрон–Менделеев



Фиг.30-2.

(29.4) изразяваме налягането на газа $p = \frac{nRT}{V}$

и го заместваме в израза за елементарната

работа: $\delta A = \frac{nRT}{V} dV$. Цялата работа е

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

където при интегрирането е отчетено, че температурата е постоянна. Графично работата се получава като се сумират площите на правоъгълниците, представящи елементарната работа при всички безкрайно малки изменения на обема dV , на които сме разделили общото му изменение $V_2 - V_1$ при прехода от състояние 1 в състояние 2. Следователно на pV -диаграма работата се представя с площта на фигурата, образувана от графиката на процеса, абсцисната ос V и перпендикулярите, спуснати от началната точка 1 и крайната точка 2 (фиг.30-2).

Количество топлина

Енергията, която една термодинамична система получава или отдава на околната среда при топлообмен, се нарича *количество топлина*. Теплообменът се извършва между тела, които имат различни температури, при което тялото с по-висока температура отдава количество топлина Q на тялото с по-ниска температура. Вътрешната енергия на тялото, което отдава топлина, намалява, а тялото, което получава количество топлина, увеличава вътрешната си енергия. При топлообмен не се извършва макроскопична работа, свързана с изменение на външните параметри (например на обема на проста система). Извършва се работа само на микроскопично равнище. Молекулите на по-

нагрятото тяло, чието хаотично движение е по-интензивно, при топлинния контакт извършват работа върху молекулите на по-студеното тяло. В резултат на тази работа част от енергията на хаотичното топлинно движение на по-нагрятото тяло се предава на молекулите на по-студеното тяло и те започват да се движат по-интензивно.

Количеството топлина, подобно на работата, има размерност на енергия (в SI и двете величини се измерват в джаули (J)). Независимо от това работата и количеството топлина не са видове енергия. Те не са функции на състоянието, затова никое състояние на системата не се характеризира с определен запас от работа A или от количество топлина Q .

Механичен еквивалент на топлината

В началото на XIX век се е смятало, че топлината е особена субстанция, наречена „топлород“, която не се създава и не се губи, а подобно на невидим флуид при теплообмен протича от по-нагрятото към по-студеното тяло. С теорията на топлорода е свързано и названието на единицата за количество топлина калория (от лат. *calorie* – топлород). По определение една калория (1 cal) е количеството топлина, необходимо за повишаване на температурата на един грам вода от $14,5^{\circ}\text{C}$ до $15,5^{\circ}\text{C}$. Дефинираната по този начин калория се нарича 15-градусна калория. Използват се още т. нар. международна калория и термохимична калория, чиито стойности се различават от 15-градусната калория с по-малко от 0,1%. Много често, особено в биологията и диетологията, се използва по-голямата единица килокалория ($1\text{ kcal} = 1000\text{ cal}$).

В периода 1843–1850 година британският физик Джеймс Джаул (1818–1889) провежда серия експерименти, с цел да изясни количественото съотношение между механичната работа и количеството топлина. Един от знаменитите опити на Джаул е показан схематично на *фиг.30-3*. Двете тежести, падащи с постоянна скорост v , въртят система от лопатки, които извършват механична работа върху водата в съда и тя се загрява. Прецизните измервания на Джаул показват, че работата, необходима за повишаване на темпе-

ратурата на 1 g вода от $14,5^{\circ}\text{C}$ до $15,5^{\circ}\text{C}$, е $4,155\text{ J}$, т.е. 1 cal топлина е количествено еквивалентна на $4,155\text{ J}$ механична работа (по онова време единицата за работа е имала друго название). Любопитно е да се отбележи, че всички проведени по-късно измервания, включително и в наши дни със съвременна експериментална техника, дават резултат, който се различава от получения от Джаул с по-малко от 1%. На основата на съвременните измервания се приема, че една 15-градусна калория е равна точно на $4,1855\text{ J}$ работа

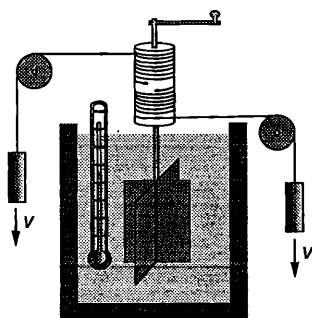
$$(30.6) \quad 1\text{ cal} = 4,1855\text{ J}.$$

Съотношението (30.6), изразяващо големината на калорията чрез единицата за работа (енергия), се нарича *механичен еквивалент на топлината*.

Опитите на Джаул бележат началото на важен етап от развитието на съвременната физика, защото отхвърлят теорията за „топлорода“ и показват количествената еквивалентност на работата и топлината. Освен това служат като експериментална основа за формулиране на закона за запазване и преобразуване на енергията, отразяващ физичното съдържание на първия принцип на термодинамиката.

Забележка. Съществуват два начина (форми) за обмяна на енергия между дадена термодинамична система и околната среда: 1. работа (с изменение на външните параметри на системата); 2. топлина (без изменение на външните параметри). Количеството енергия, което се предава посредством тези форми (начини) на енергообмен се нарича съответно работа и количество топлина. Самите процеси се наричат работа и теплообмен. Следователно понятието *работа* в термодинамиката има три различ-

Фиг.30-3. Опит на Джаул.



ни смисъла: 1. работата като процес; 2. работата като начин (форма) за предаване на енергия; 3. работата като количествена мярка за предадената енергия. При топлинните явления по исторически причини, чиито корени идват от погрешната теория на топлорода, според която топлината е своеобразен флуид, преминаващ при топлообмен от нагретите в студените тела, в трите случая са възприети различни термини: 1. процесът се нарича топлообмен; 2. формата (начинът) за предаване на енергия се нарича топлина; 3. количеството топлина е мярката за предадената енергия. Затова, когато казваме, че тялото поглъща или отдава топлина, имаме предвид формата под която се извършва енергообменът, а когато казваме, че тялото е погълнало определено количество топлина, имаме предвид количествената мярка на получената от тялото енергия в процеса топлообмен.

Вечен двигател (лат. *perpetuum mobile*)

Още през XIII век редица изобретатели били заплениени от примамливата идея да създадат машина, която да извършва работа без да получава енергия отвън. Такава машина по-късно била наречена вечен двигател от първи род. Всички опити обаче завършвали с неуспех и през втората половина на XVIII век Френската академия на науките решава „веднъж завинаги“ да престане да разглежда подобни проекти. Вечният двигател противоречи на един от основните природни закони – на закона за запазване на енергията.

Защо такъв фундаментален закон е бил ясно формулиран едва в средата на XIX век? Причината е в погрешната теория на топлорода, която разглежда топлината като особена субстанция, а не като един от начините за обмен на енергия. За да се стигне до закона за запазване на енергията, било е необходимо най-напред да се установи количествената еквивалентност на работата и топлината, т.е. да се разбере, че това са два различни начина за изменение на енергията. Законът за запазване на енергията е формулиран за пръв път през 1842 г. от германския лекар и физик Юлиус Роберт фон Майер (1814–1878) и през 1847 г. от германския физик и физиолог Херман фон Хелмхолц (1821–1894) и е потвърден с опитите на Джаул.

Първи принцип на термодинамиката

В своята същност първият принцип на термодинамиката изразява закона за запазване на енергията в термодинамичните системи. Може да се формулира по следния начин:

Всяко състояние на една термодинамична система се характеризира с точно определена стойност на вътрешната енергия. Системата може да променя вътрешната си енергия само при взаимодействие с околната среда: чрез извършване на работа или чрез топлообмен.

Математически първият принцип на термодинамиката се изразява с уравнението

$$(30.7) \quad Q = U_2 - U_1 + A \text{ или } Q = \Delta U + A,$$

където U_1 е вътрешната енергия на системата в началното състояние, U_2 – в крайното, $\Delta U = U_2 - U_1$ е изменението на вътрешната енергия, Q е количеството топлина, получено от системата, а A е работата, която тя е извършила върху околната среда.

За елементарен процес (процес, при който изменението на параметрите на термодинамичната система е безкрайно малко) уравнението на първия принцип на термодинамиката е

$$(30.8) \quad \delta Q = dU + \delta A,$$

където δQ е безкрайно малкото количество топлина, получено от системата, δA – елементарната работа, която тя е извършила върху околната среда, а dU е изменението на вътрешната енергия. За означаване на елементарната работа δA и елементарното количество топлина δQ се използва символът „ δ “, а не „ d “, за да се подчертае, че за разлика от вътрешната енергия U работата и количеството топлина не са функции на състоянието. Те характеризират само процесите, чрез които термодинамичната система преминава от едно състояние в друго състояние.

За проста система $\delta A = pdV$ и уравнение (30.8) се записва във вида

$$(30.9) \quad \delta Q = dU + pdV.$$

Пример 30.2. За изпарението на един грам вода, която се намира при атмосферно налягане, е необходимо количество топлина $Q = 2260 \text{ J}$. Определете изменението на вътрешната енергия на водата при този процес. Обемът на един грам вода е $V_1 = 1,00 \text{ cm}^3$, а обемът на един грам водни пари при атмосферно налягане ($p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) е $V_2 = 1670 \text{ cm}^3$.

Решение. В процеса на изпарение термодинамичната система (водата) увеличава обема си при постоянно налягане и извършва работа върху околната среда

$$A = p(V_2 - V_1) \approx pV_2 = 169 \text{ J}.$$

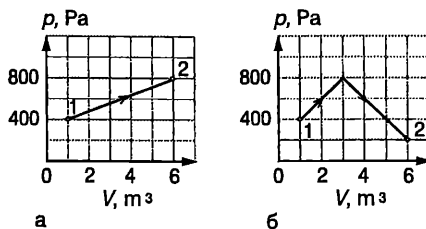
Изменението на вътрешната енергия определяме от уравнението на първия принцип на термодинамиката (30.7)

$$\Delta U = Q - A = 2260 \text{ J} - 169 \text{ J} = 2,09 \text{ kJ}.$$

на, която да извършва работа без да получава енергия от околната среда.

Задачи

1. Идеален газ се разширява от състояние 1 до състояние 2 през процесите, показани на pV -диаграмите от фиг.30-5. Определете работата на газа. Решете задачата графично.



Фиг.30-5.

2. Дадено количество идеален газ, което в началното състояние заема обем V_0 при налягане p_0 , се нагрява и се разширява, докато обемът му нарасне 2 пъти. Определете работата на газа, ако налягането му по време на разширението се изменя по закона $p = aV$, където a е константа.

3. Дадено количество идеален газ, което в началното състояние заема обем 1 m^3 при налягане $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, се разширява докато обемът му нарасне 2 пъти. Определете работата на газа, ако налягането му по време на разширението се изменя по закона $p = aV^{-2}$, където a е константа.

4. Дадено количество идеален газ, което в началното състояние заема обем 2 m^3 при налягане $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, се разширява при постоянна температура докато обемът му нарасне 2 пъти. Определете работата на газа.

5. Термодинамична система извършва процес, при който околната среда извършва положителна работа 400 J върху системата, а системата по време на процеса отдава 600 J количество топлина на околната среда. Колко джаула е изменението на вътрешната енергия на системата?

6. Определете количеството топлина, което обменя с околната среда идеален газ за циклите, показани на pV -диаграмите от фиг.30-6.

7. Идеален газ с маса m и моларна маса M се охлажда при постоянен обем, докато налягането му намалее k пъти. След това газът се разширява при постоянно налягане, докато достигне началната си температура T_0 . Определете

Кръгов процес (цикъл)

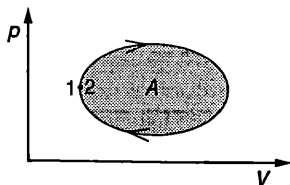
Кръгов процес или цикъл се нарича последователност от термодинамични процеси, в резултат на които системата се връща в изходното си състояние (фиг.30-4). Тъй като крайното състояние 2 на системата съвпада с нейното начално състояние 1, то $U_2 = U_1$ и изменението на вътрешната енергия е нула ($\Delta U = U_2 - U_1 = 0$). Уравнение (30.7) в този случай добива вида

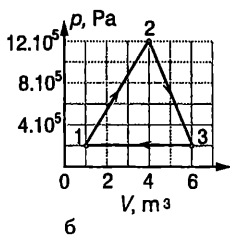
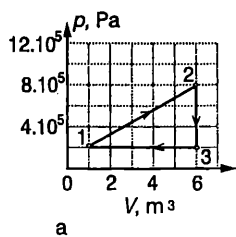
$$(30.10) \quad Q = A,$$

т.е. полученото количество топлина Q е равно на работата A , която е извършила системата. На pV -диаграма работата A се представя с площта на фигурата, заградена от графиката на цикъла (фиг.30-4).

Следователно машина, работеща по затворен цикъл, може да извършва работа само ако получава енергия (количество топлина) отвън. Това означава, че не е възможен вечен двигател от първи род, т.е. такава периодично действаща маши-

Фиг.30-4. Термодинамичен цикъл.

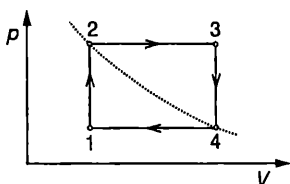




Фиг.30-6.

работата на газа.

8. С 1 mol идеален газ се извършва цикъл, съставен от два изохорни процеса и два изобарни процеса (фиг. 30.7). Определете работата на газа, ако точките 2 и 4 лежат на една изотерма. Температурата на газа в състояние 1 е T_1 , а в състояние 3 температурата е T_3 .



Фиг.30-7.

9. Във вертикален цилиндър под безтегловно бутало се намира $n \text{ mol}$ идеален газ при температура T . Външното налягане е постоянно. Колко работа трябва да извърши външна сила, за да повдигне много бавно буталото, докато обемът на газа нарасне k пъти. Температурата на газа през цялото време остава постоянна. Триенето се пренебрегва.

10. Идеален газ с маса $m = 1 \text{ kg}$ се нагрява изобарно, при което температурата му нараства с $\Delta T = 32 \text{ K}$. Определете моларната маса на газа, ако при нагряването той е извършил работа $A = 8,3 \text{ kJ}$.

11. През 1846 г. Джаул установява експериментално, че за 24 часа кон може да извърши работа, която е равна на работата за издигане на товар с маса 10^7 kg на височина 30 см. За същото време конят изяжда храна, при чието разграждане се отделя енергия 120 MJ . Колко процента от тази вътрешна енергия се използва от коня за извършване на механична работа?

12. Момиче, което е на диета, консумира на ден храна с обща калоричност 2500 kcal , а при обмяната на веществата използва $12\,600 \text{ kJ}$ на ден. Ако приемем, че дефицитът от енергия се

попълва в резултат на разграждане на телесни мазнини, за колко дни момичето ще отслабне с 1 kg ? При разграждането на 1 g мазнини се отделят 39 kJ енергия.

13. Отделената при обмяната на веществата вътрешна енергия може да се измери по изразходвания по време на този процес кислород. При стандартна диета за отделяне на 20 kJ енергия при метаболизма е необходим 1 литър кислород. Колко литра кислород използва за 24 часа момиче с маса 50 kg , което е на стандартна диета? Приемете, че за поддържането на нормални жизнени функции при метаболизма за 1 s трябва да се отделя по 3 J енергия на 1 kg живо тегло.

14. Във физикохимията се използва правилото на Хес, което гласи: *топлинният ефект от химична реакция, протичаща при постоянен обем V или при постоянно налягане p , не зависи от междинните реакции, а се определя само от началното и от крайното състояние на реагиращите вещества*. С помощта на първия принцип на термодинамиката докажете правилото на Хес.

15. При образуване на 1 mol вода от елементи се отделя количество топлина $Q_1 = 287 \text{ kJ/mol}$, а за изпарение на 1 mol вода е необходимо количество топлина $Q_2 = 40 \text{ kJ/mol}$. Определете какво количество топлина се отделя при получаването на 1 mol водни пари от елементи.

16. Да се определи топлинният ефект при непълното изгаряне на твърд въглерод в атмосфера на въглероден оксид. (Топлинният ефект от тази реакция не може да се определи непосредствено, защото на практика се получава смес от окисите CO и CO_2 .) Известно е, че топлинният ефект при пълното изгаряне на въглерода е 394 kJ/mol , а топлинният ефект при изгарянето на CO е 283 kJ/mol .

17. Оперен певец поддържа тона „ла“ в течение на $t = 20 \text{ s}$, при което издишва въздух, чийто обем при нормални условия е $V_0 = 1 \text{ l}$ (при температура $T_0 = 273 \text{ K}$ и налягане $p_0 = 760 \text{ mm Hg}$). Температурата и налягането в залата са съответно равни на $T = 293 \text{ K}$ и $p = 750 \text{ mm Hg}$. По време на изпълнението налягането в дробовите на певеца е $p_1 = 780 \text{ mm Hg}$. Каква мощност изразходва певецът, за да изтласка външния въздух? Изменението на обема на гръдния кош на певеца не се отчита.

31. Топлинни капацитети. Адиабатен процес

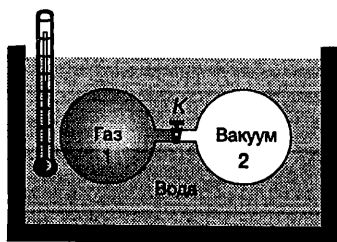
Закон на Джаул

Вътрешната енергия е функция на състоянието на термодинамичната система и съгласно с втория постулат на термодинамиката се определя от външните параметри и температурата. В случай на проста система само с един външен параметър (обем V) вътрешната енергия е функция на обема и на температурата

$$(31.1) \quad U = U(V, T).$$

Гей-Люсак, а по-късно и Джаул, провеждат серия от опити, за да установят как вътрешната енергия на газовете зависи от техния обем. Използваната от Джаул опитна постановка е показана схематично на *фиг.31-1*. Два еднакви съда с твърди стени са поставени във водна ванна. Единият съд е запълнен с въздух, а другият е вакуумиран. Измерва се началната температура T_0 на водата във ваната, след което се отваря кранът K . Въздухът от съд 1 свободно се разширява, при което не извършва работа, защото няма външни сили, които да му пречат да запълни обема на втория съд. След установяване на термодинамично равновесие отново се измерва температурата на водата във ваната. Опитите показват, че тя е равна на началната температура T_0 . Следователно при разгледания процес въздухът не обменя топлина с водата и не извършва работа. Температурата на въздуха също остава постоянна, докато обемът му нараства 2 пъти. Оттук Джаул стига до извода, че в границите на точността, с която е напра-

Фиг.31-1. Опит на Джаул.



вен опитът, вътрешната енергия на въздуха зависи единствено от температурата и не зависи от обема

$$(31.2) \quad U = U(T).$$

Уравнение (31.2) изразява закона на Джаул за вътрешната енергия на идеален газ:

Вътрешната енергия на определена маса идеален газ не зависи от обема на газа, а се определя само от температурата.

Видът на функцията $U(T)$ се определя експериментално или по методите на молекулно-кинетичната теория.

В периода от 1852 до 1862 г. Джаул съвместно с Уилям Томсън (лорд Келвин) (1824–1907) провеждат серия от прецизни експерименти, които показват, че вътрешната енергия на реалните газове зависи не само от температурата, но и от техния обем. Колкото по-разреден е един газ, толкова по-слаба е зависимостта на вътрешната енергия от обема на газа.

Топлинни капацитети

Количеството топлина, необходимо за повишаване температурата на дадено тяло с един градус, се нарича топлинен капацитет C' на тялото. По определение

$$(31.3) \quad C' = \frac{\delta Q}{dT},$$

където dT е увеличението на температурата на тялото, след като е погълнало безкрайно малкото количество топлина δQ . Топлинният капацитет на телата зависи от тяхната маса и от вида на веществото. За да се характеризират веществата, от които са изградени телата, се използват величините *специфичен топлинен капацитет* c (топлинен капацитет на $m = 1$ kg от веществото – означава се с малка буква c)

$$(31.4) \quad c = \frac{C'}{m} = \frac{\delta Q}{m dT}$$

и *моларен топлинен капацитет* C (топлинен капацитет на $n = 1$ mol от веществото – означава се с главна буква C)

$$(31.5) \quad C = \frac{C'}{n} = \frac{\delta Q}{n dT}.$$

Съгласно с уравнението на първия принцип на термодинамиката (30.8) част от погълнатото количество топлина δQ отива за увеличаване dU на вътрешната енергия, а друга част – за извършване на работа δA . Съотношението между dU и δA зависи от вида на процеса. Колкото по-малко работа извършва тялото (термодинамичната система) при погълщането на количество топлина δQ , толкова по-голяма част от δQ отива за увеличаване на вътрешната енергия, а оттам и на температурата. Следователно в този случай, съгласно с формула (31.3), топлинният капацитет е по-малък. Обратно, процесите, при които се извършва повече работа, се характеризират с по-голям топлинен капацитет.

И така, топлинните капацитети зависят не само от вида на веществото, но и от начина, по който става нагряването, т.е. от вида на процеса. Специален интерес представляват случаите, когато нагряването става без да се изменя обемът (изохорен процес) или при постоянно налягането (изобарен процес).

Топлинни капацитети при постоянен обем (C_V) и при постоянно налягане (C_p)

Идеален газ е затворен в съд с твърди стени. На газа се предава количество топлина δQ , при което той се нагрява без да изменя обема си ($dV = 0$). Газът не извършва работа и съгласно с уравнението на първия принцип на термодинамиката (30.9) погълнатото количество топлина е равно на увеличението на вътрешната енергия на газа: $\delta Q = dU$. Тогава уравнение (31.5) добива вида

$$(31.6) \quad C_V = \frac{\delta Q}{ndT} = \frac{dU}{ndT}.$$

Величината C_V се нарича *моларен топлинен капацитет при постоянен обем* или *моларен изохорен топлинен капацитет*. Опитът показва, че изохорният топлинен капацитет C_V на разредените (идеални) газове в широк температурен интервал (например за водорода, азота и кислорода от 100 K до 1000 K) практически не зависи от температурата. Ако приемем C_V за константа, след интегриране на уравнението $dU = nC_V dT$ определяме вътреш-

ната енергия на n mol идеален газ (31.7)

$$U = nC_V T,$$

където сме приели, че $U = 0$ при $T = 0$.

Нека сега n mol идеален газ е затворен в цилиндър с бутало, което може да се движи без триене. Газът получава количество топлина δQ , при което бавно се разширява, така че налягането му не се променя – остава равно на външното налягане $p = \text{const}$. Съгласно със закона на Джаул вътрешната енергия на идеалния газ не зависи от обема. Затова изменението на вътрешната енергия при разширението на газа се определя само от изменението dT на температурата и може да запише по същия начин, както при нагряване без изменение на обема: $dU = nC_V dT$. Елементарната работа $\delta A = pdV$ при изобарното разширение на газа се изразява чрез изменението на температурата dT , като се диференцират двете страни на уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = nRT$

$$pdV + Vdp = nRdT.$$

Тъй като процесът е изобарен, $p = \text{const}$ и $dp = 0$, за елементарната работа се получава $\delta A = pdV = nRdT$.

Заместваме

$$\delta Q = dU + \delta A = nC_V dT + nRdT$$

в уравнение (31.5) и определяме моларния топлинен капацитет на идеалния газ при постоянно налягане

$$(31.8) \quad C_p = \frac{\delta Q}{ndT} = \frac{nC_V dT + nRdT}{ndT} = C_V + R.$$

Ще подчертаем, че за идеален газ разликата в стойностите на двата топлинни капацитета ($C_p > C_V$) се дължи единствено на работата, която в случая на изобарно разширение газът извършва, за да преодолее постоянното външно налягане. За идеален газ

$$(31.9) \quad C_p - C_V = R = 8,314 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}.$$

Това съотношение е получено от Майер, който през 1842 година пръв измерва механичния еквивалент на топлината, и в негова чест е наречено *уравнение на Майер*.

Например при калориметрични измервания на топлинните капацитети на въздуха се получава: $C_p - C_V = 1,986 \text{ cal/(mol}\cdot\text{K)}$.

От друга страна, газовата константа R се определя по независим начин в механични единици: $R = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$. След това от уравнението на Майер (31.9) се пресмята механичният еквивалент на топлината: $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$.

Ще отбележим, че поради неточните данни, с които разполагал, Майер получава значително по-малка стойност за механичния еквивалент на топлината от представената по-горе истинска стойност. Първите точни измервания, както беше отбелязано, извършва Джаул.

Макар че е точно вярно само за идеалните газове, уравнението на Майер (31.9) с достатъчно голяма точност може да се използва и при реалните газове. Течностите и твърдите вещества обаче се разширяват много малко при нагряване. Затова при тях разликата между изобарния и изохорния топлинен капацитет е значително по-малка. Например при стайна температура и нормално атмосферно налягане моларният изобарен топлинен капацитет C_p на водата е само с около 0,003% по-голям от моларния изохорен топлинен капацитет C_v . Затова в повечето случаи е достатъчно течностите и твърдите тела да се характеризират само с изобарния топлинен капацитет C_p , чиито стойности полесно се измерват експериментално. В таблица 31.1 са дадени стойностите на C_p за някои химични елементи и съединения.

Таблица 31.1. Моларен изобарен топлинен капацитет C_p при температура 298 K и налягане $1 \text{ atm} = 101,3 \text{ kPa}$. Газовете и течностите са отбелязани съответно с (г) и (т).

Вещество	$C_p, \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
Азот N_2 (г)	29,12
Алуминий	24,35
Вода H_2O (т)	75,3
Вода H_2O (г)	33,6
Живак (т)	27,98
Кислород O_2 (г)	29,38
Мед	24,43
Никел	26,07
Селен Se_2 (г)	35,40
Сребро	26,25
Хлор Cl_2 (г)	33,94
Цинк	25,44
Въглероден оксид CO (г)	29,1
Въглероден диоксид CO_2 (г)	37,1

Пример 31.1. Като използвате данните от табл.31.1, определете специфичните топлинни капацитети на водата и на водните пари. Моларната маса на водата е $M = 0,018 \text{ kg/mol}$.

Решение. Изразяваме масата m на дадено количество ($n \text{ mol}$) вещество чрез моларната му маса M , $m = nM$, и заместваем m във формула (31.4), чрез която се въвежда величината специфичен топлинен капацитет

$$c = \frac{\delta Q}{mdT} = \frac{\delta Q}{nMdT} = \frac{C}{M},$$

където $C = \frac{\delta Q}{ndT}$ е моларният топлинен капацитет. За водата:

$$c = \frac{75,3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{0,018 \text{ kg/mol}} = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Специфичният изобарен топлинен капацитет на водните пари е:

$$c_p = \frac{33,6 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{0,018 \text{ kg/mol}} = 1870 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Ако разглеждаме водните пари като идеален газ, с помощта на уравнението на Майер можем да определим и техния изохорен специфичен топлинен капацитет

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{C_v}{M} = \frac{C_p - R}{M} = c_p - \frac{R}{M} = \\ &= 1870 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - \frac{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{0,018 \text{ kg/mol}} = 1410 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}. \end{aligned}$$

Пример 31.2. Дадено количество идеален газ се нагрява при такива условия, че налягането на газа се изменя правопрпорционално на неговия обем: $p = aV$, където a е константа. Изразете моларния топлинен капацитет C на газа при този процес чрез изохорния моларен топлинен капацитет C_v на газа и универсалната газова константа R .

Решение. В уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = nRT$ заместваем $p = aV$ и получаваме $aV^2 = nRT$. Диференцираме двете страни на това уравнение

$$2aVdV = nRdT \text{ или } pdV = \frac{1}{2}nRdT,$$

където сме заместили обратно aV с p . Търсеният моларен топлинен капацитет е

$$C = \frac{\delta Q}{ndT} = \frac{dU + pdV}{ndT} = \frac{nC_V dT + nRdT/2}{ndT} = C_V + \frac{R}{2}.$$

Пример 31.3. Колко е вътрешната енергия на въздуха в стаята? Разгледайте въздуха като идеален газ с изохорен моларен топлинен капацитет $C_V = 5R/2$, където R е универсалната газова константа. Обемът на стаята е $V = 20 \text{ m}^3$, налягането е равно на атмосферното налягане $p = 1.10^5 \text{ Pa}$, а температурата е 20°C . Ще се измени ли вътрешната енергия на въздуха в стаята, ако се увеличи температурата му?

Решение. Вътрешната енергия на n мола идеален газ е $U = nC_V T$. От уравнението за състоянието на газа $pV = nRT$ изразяваме $nT = pV/R$ и го заместваем във формулата за вътрешната енергия. Получаваме

$$U = \frac{C_V pV}{R} = \frac{5}{2} pV = 2,5(1.10^5 \text{ Pa})(20 \text{ m}^3) = 5.10^6 \text{ J}.$$

Тъй като при нагряването обемът на стаята V не се променя, а налягането p остава равно на външното атмосферно налягане, от получения резултат следва, че вътрешната енергия на въздуха в стаята също не се променя. Част от въздуха е напуснал стаята, но останалият въздух има по-висока температура и единица маса от него има по-голяма вътрешна енергия. Ще отбележим, че този резултат е верен само в рамките на опростения модел на идеалния газ. В действителност обаче въздухът е реален газ, чиито молекули имат потенциална енергия, а освен това към вътрешната енергия се включва и вътрешномолекулната, атомната и ядрената енергия. Затова поради намаляването на масата на въздуха в стаята, вътрешната му енергия също намалява.

Адиабатен процес

Да разгледаме термодинамична система, която е отделена от околната среда с топлонепроницаема обвивка. Такава система, която не може да обменя топлина с околната среда ($\delta Q = 0$), се нарича *адиабатно изолирана система*. Топлонепроницаемата обвивка се нарича *адиабатна обвивка*. Термодинамичните процеси – равновесни или неравновесни, които протичат в адиабатно изолирана система, се

наричат *адиабатни процеси*. Най-важната особеност на адиабатните процеси е, че при тях системата не обменя количество топлина с околната среда. Адиабатно изолирана система може да се намира единствено в механично взаимодействие с околната среда: да извършва положителна или отрицателна работа върху околните тела. Редица реални процеси с добро приближение могат да се разглеждат като адиабатни, независимо че не винаги е изпълнено изискването за топлинна изолация от околната среда. Такива като правило са процесите, които протичат достатъчно бързо, така че обмененото по време на процеса количество топлина е пренебрежимо малко в сравнение с извършената работа. Напомпването на автомобилна гума, свиването на горивната смес в двигателите с вътрешно горене, свиването и разширението на въздуха при разпространението на звукови вълни са примери за адиабатни процеси.

Уравнение на Поасон

Уравнението, което описва равновесните адиабатни процеси при идеалния газ, се извежда от уравнението за състоянието на идеалния газ и от уравнението на първия принцип на термодинамиката. Да разгледаме $n \text{ mol}$ идеален газ, затворен в цилиндър с бутало. Стените на цилиндъра и буталото са топлонепроницаеми. Газът бавно се разширява, без да обменя топлина с околната среда ($\delta Q = 0$). Уравнението на първия принцип на термодинамиката в този случай се записва във вида

$$(31.10) \quad 0 = dU + pdV = nC_V dT + pdV.$$

Диференцираме двете страни на уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = nRT$ и получаваме

$$(31.11) \quad pdV + Vdp = nRdT.$$

От уравнение (31.11) изразяваме dT и го заместваем в (31.10). След елементарни преобразования получаваме

$$(31.12) \quad (C_V + R)pdV + C_V Vdp = 0.$$

От уравнението на Майер (31.9) заместваем $C_V + R = C_p$ и делим двете страни на равенство (31.12) на C_V . Получаваме

$$(31.13) \quad \frac{C_p}{C_v} p dV + V dp = \gamma p dV + V dp = 0,$$

където безразмерната величина

$$(31.14) \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

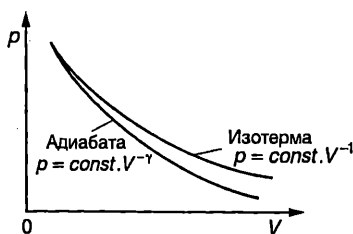
се нарича *коэффициент на Поасон*. Диференциалното уравнение (31.13) описва равновесния адиабатен процес с идеален газ. След разделяне на променливите

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

и интегриране се получава

$$(31.15) \quad pV^\gamma = \text{const.}$$

Уравнение (31.15) се нарича *уравнение на Поасон*. На pV -диаграма адиабатният процес се представя с хиперболата $p = \text{const.} V^{-\gamma}$, наречена *адиабата*. Тъй като $\gamma > 1$, адиабатата е по-стръмна от изотермата $p = \text{const.} V^{-1}$. На фиг. 31-2 са показани два процеса с дадено количество идеален газ, започващи от едно и също състояние 1 – адиабатен процес и изотермен процес. Обърнете внимание, че адиабатата е по-стръмна и лежи под изотермата.



Фиг.31-2.

Пример 31.4. Запишете уравнението на Поасон (31.15) в променливи (T, V) и (T, p) .

Решение. От уравнението за състоянието на идеалния газ изразяваме налягането $p = nRT/V$ и го заместваме в уравнението на Поасон

$$\frac{nRT}{V} V^\gamma = nRT V^{\gamma-1} = \text{const.}$$

Произведението nR за даденото количество газ е константа, затова, след като разделим две-

те страни на полученото равенство на nR , от дясната му страна ще получим отново константа (с друга числена стойност, но това в случая не е съществено)

$$(31.16) \quad TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

По аналогичен начин след заместване на $V = nRT/p$ се получава

$$(31.17) \quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const.}$$

Изменение на вътрешната енергия при адиабатен процес

Да разгледаме термодинамична система, която преминава от равновесно състояние 1 с вътрешна енергия U_1 в равновесно състояние 2 с вътрешна енергия U_2 чрез адиабатен процес (процесът може да бъде и неравновесен). Тъй като при адиабатен процес системата не обменя количество топлина с околната среда ($Q = 0$), уравнението на първия принцип на термодинамиката има вида

$$0 = U_2 - U_1 + A$$

или

$$A = -(U_2 - U_1) = -\Delta U,$$

където ΔU е изменението на вътрешната енергия на системата. Следователно работата A , която една термодинамична система извършва при адиабатен процес, е равна на взетото със знак минус изменение на вътрешната енергия на системата. Когато системата върши положителна работа (адиабатно разширение, $A > 0$), нейната вътрешна енергия намалява ($\Delta U < 0$). При адиабатно разширение термодинамичната система извършва положителна работа върху околните тела за сметка на своята вътрешна енергия. Например, ако дадено количество газ се разширява адиабатно, вътрешната му енергия намалява и температурата на газа се понижава.

Обратно, при адиабатно свиване $A < 0$ и $\Delta U > 0$ – термодинамичната система увеличава вътрешната си енергия в резултат на положителната работа A' , която извършват външните сили ($A' = -A > 0$). При адиабатно свиване вътрешната енергия на газовете нараства и те се нагряват.

Пример 31.5. Дадено количество (n mol) идеален газ извършва равновесен адиабатен процес от състояние с обем V_1 и налягане p_1 до състояние с обем V_2 ($V_2 > V_1$). Определете работата на газа A и изменението на вътрешната му енергия ΔU .

Решение. Да означим с T_1 началната температура на газа, а с T_2 – крайната температура. Тъй като процесът е адиабатен, газът не обменя топлина с околната среда и съгласно с уравнението на първия принцип на термодинамиката

$$A = U_1 - U_2 = nC_V(T_1 - T_2),$$

където сме отчели, че вътрешната енергия на n mol идеален газ е $U = nC_V T$. Ще обърнем внимание, че горното уравнение изразява работата, която извършва n mol идеален газ при преминаване от състояние с температура T_1 в състояние с температура T_2 независимо от това дали адиабатният процес е равновесен или е неравновесен. Уравнението на Поасон обаче, което ще използваме по-нататък, описва само равновесните адиабатни процеси с идеален газ.

От уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = nRT$ изразяваме температурата T и я заместваме в полученото уравнение за работата на газа

$$A = nC_V \left(\frac{p_1 V_1}{nR} - \frac{p_2 V_2}{nR} \right) = C_V \frac{p_1 V_1}{R} \left(1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \right).$$

От уравнението на Поасон изразяваме $p_2/p_1 = (V_1/V_2)^\gamma$ и го заместваме в горното равенство. Получаваме

$$A = C_V \frac{p_1 V_1}{R} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Тъй като по условие $V_2 > V_1$, то $A > 0$: газът се разширява адиабатно и извършва положителна работа за сметка на вътрешната си енергия, която намалява, $\Delta U = -A$.

Задачи

1. Определете изменението на вътрешната енергия на $n = 5$ mol въздух, когато температурата му нарасне с $\Delta T = 20$ K. Изохорният моларен топлинен капацитет на въздуха е $C_V = 2,5R$, където $R = 8,31$ J/mol·K е универсалната газова константа.

2. Колко джаула количество топлина са необходими, за да се нагряят от температура 100°C до температура 110°C 200 g водни пари, намиращи се при атмосферно налягане?

Указание. Използвайте резултата от пример 31.1.

3. Един мол идеален газ се нагрява при постоянно налягане от температура 0°C до температура 100°C , при което поглъща количество топлина $Q = 3,35$ kJ. Определете:

- стойността на коефициента на Поасон γ за този идеален газ;
- изменението на вътрешната енергия на газа;
- работата на газа.

4. Докажете, че вътрешната енергия на дадено количество идеален газ с обем V и налягане p е

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} pV,$$

където γ е коефициентът на Поасон за газа.

5. Някакво количество идеален газ с коефициент на Поасон $\gamma = 5/3$ се разширява при постоянно налягане $p = 1 \cdot 10^5$ Pa, при което обемът му се изменя от $V_1 = 0,2$ m³ до $V_2 = 0,3$ m³. Определете:

- изменението на вътрешната енергия на газа;
- работата на газа;
- погълнатото от газа количество топлина.

6. Идеален газ с начална температура $T_1 = 300$ K се свива адиабатно, докато обемът му се намали 3 пъти. Определете крайната температура T_2 на газа ($\gamma = 5/3$).

7. Идеален газ с начална температура $T_1 = 300$ K се разширява адиабатно, докато налягането му се намали 3 пъти. Определете крайната температура T_2 на газа ($\gamma = 5/3$).

8. $n = 2$ mol идеален газ, който се намира при температура $T_1 = 300$ K, се разширява адиабатно, при което обемът му нараства 2 пъти. Определете работата на газа, ако изохорният му моларен топлинен капацитет е $C_V = 1,5R$, където $R = 8,31$ J/(mol·K) е универсалната газова константа.

Молекулно-кинетична теория на идеален газ



Лабораторна демонстрация на
молекулното движение

Идеалният газ е опростен теоретичен модел на газ, в който се пренебрегват размерите и взаимодействието на частиците на газа, а се отчитат единствено еластичните удари между тях. В тази глава ще установим как основните макроскопични характеристики на газовете (вътрешна енергия, налягане, температура) са свързани с топлинното движение на молекулите на газа, ще разгледаме разпределението на молекулите по скорости и в пространството и ще се спрем на процесите, при които става пренасяне на импулс, енергия или вещество.

32. Налягане и температура на идеален газ

Идеален газ

Молекулите на газовете взаимодействат с консервативни молекулни сили на привличане и отблъскване, които по своята природа са електромагнитни сили. Когато молекулите са отдалечени една от друга, преобладават силите на привличане. На много малки разстояния силите на отблъскване рязко нарастват и молекулите за кратко време се оттласкват и отдалечават една от друга. Разстоянието между центровете на масите на две молекули, при което резултантната сила на взаимодействие от сила на привличане става сила на отблъскване, се приема за ефективен диаметър d на молекулата. При нормални условия средното разстояние между молекулите е много по-голямо от техния диаметър, т.е. собственият обем на молекулите е много по-малък от обема, зает от газа. На такива големи разстояния междумолекулните сили почти не се проявяват. Те са съществени само когато молекулите се доближат на разстояние от порядъка на техния диаметър. През останалото време молекулите може да се разглеждат като невзаимодействащи частици. Най-простият модел, който описва движението и взаимодействието на молекулите на газовете, е моделът на идеалния газ. В този модел се правят съществено опростяващи задачите приближения:

1. *Пренебрегва се собственият обем на молекулите.*

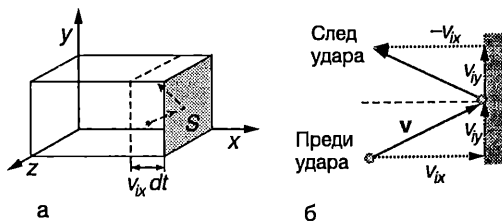
2. *Пренебрегва се потенциалната енергия на взаимодействие между молекулите.* Смята се, че през по-голямата част от времето молекулите се движат праволинейно и равномерно и не взаимодействат помежду си. Те встъпват във взаимодействие само когато се доближат на много малко разстояние една от друга. Това взаимодействие се разглежда като еластичен удар, подобен на удара между две твърди тела в класическата механика. Времето на удара е много по-малко от средното време между два последователни удара. В резултат

на удара молекулите рязко променят посоката и големината на скоростта си, след което отново се движат праволинейно и равномерно (до следващия удар).

Налягане на газа върху стените на съда

Идеален газ изпълва съд с форма на правоъгълен паралелепипед (фиг.32-1а). Ще пресметнем налягането, което газът оказва върху стените на съда. Ще смятаме, че всички молекули на газа са еднакви. В даден момент от времето молекулите се движат с различни по големина и посока скорости. Ще ги разделим на групи в зависимост от големината на x -компонентата на скоростта им. Нека N_i е броят на молекулите от i -тата група. x -компонентата на тяхната скорост е v_{ix} . Поради хаотичния характер на движението, за половината от тези молекули компонентата v_{ix} е насочена по положителната посока на оста x , а за другата половина – в противоположната посока. Да разгледаме молекула от i -тата група, която се отразява от дясната стена на съда (фиг.32-1б). Ще смятаме удара в стената за абсолютно еластичен. Както е известно от механиката (вж. §13), при абсолютно еластичен удар на частица в стена кинетичната енергия на частицата не се променя. Компонентата на скоростта на частицата, перпендикулярна на стената (в случая x -компонентата), само сменя посоката си на противоположната, докато успоредните на стената компоненти (в случая y - и z -компонентите) не се променят. Не се променят и y - и z -компонентите на импулса на молекулата. Преди удара x -компонентата на импулса на молекулата е mv_{ix} , а след удара става $-mv_{ix}$, където m е масата на молекулата. Следователно в резултат на удара стената на съда получава от молекулата импулс

Фиг.32-1.



$$mv_{ix} - (-mv_{ix}) = 2mv_{ix}.$$

За време dt в дясната стена на съда ще се ударят половината от молекулите от i -тата група (тези, които се движат надясно), намиращи се в началния момент на разстояние не по-голямо от $v_{ix}dt$ от стената, т.е. в паралелепипеда с обем $Sv_{ix}dt$, където S е площта на стената (фиг.32-1а).

Техният брой е $dN_i = \frac{N_i}{V} \frac{Sv_{ix}dt}{V}$, където V е обемът на газа.

В резултат на ударите за време dt стената получава импулс

$$(32.1) \quad dp_i = (2mv_{ix})dN_i = \frac{mN_iv_{ix}^2 S dt}{V}.$$

Съгласно с втория принцип на механиката молекулите от i -тата група действат на стената със сила

$$(32.2) \quad F_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{mN_iv_{ix}^2 S}{V}.$$

Резултантната сила, с която действат върху стената всички молекули, е

$$(32.3) \quad F = \sum F_i = \frac{mS}{V} \sum N_iv_{ix}^2,$$

където сумирането се извършва по всички групи, на които сме разделили молекулите. Силата F е насочена по оста x , т.е. перпендикулярно на стената на съда. Налягането p на газа по определение е равно на силата, с която той действа на единица площ от стениите на съда

$$(32.4) \quad p = \frac{F}{S} = \frac{m}{V} \sum N_iv_{ix}^2.$$

Сумата от квадратите на x -компонентите на скоростите на всички молекули, разделена на общия брой N на молекулите на газа, се нарича средна стойност на квадрата на x -компонентата на скоростта $\overline{v_x^2}$. По определение

$$(32.5) \quad \overline{v_x^2} = \frac{\sum N_iv_{ix}^2}{N}.$$

От уравнения (32.4) и (32.5) за налягането на газа се получава

$$(32.6) \quad p = \frac{N}{V} m \overline{v_x^2}.$$

Чрез аналогични на (32.5) равенства се дефинират средните стойности на квадратите на y - и z -компонентите на скоростта $\overline{v_y^2}$ и $\overline{v_z^2}$. Величината

$$(32.7) \quad \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

се нарича среден квадрат на скоростта на молекулите, а $\overline{v_{\text{кв.}}} = \sqrt{\overline{v^2}}$ – *средна квадратична скорост* на молекулите.

Тъй като не съществуват привилегирани направления на движение – движението на молекулите е напълно хаотично и всички посоки на движение са еднакво вероятни, то

$$(32.8) \quad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}.$$

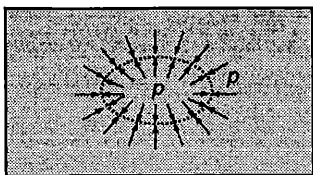
Заместваме $\overline{v_x^2}$ от уравнение (32.8) в (32.6) и получаваме

$$(32.9) \quad p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \overline{v^2}.$$

Уравнение (32.4) изразява макроскопичната величина налягане p на газа чрез микроскопичните величини v_{ix} – скоростите на отделните молекули. В резултат на ударите отделните молекули непрекъснато променят скоростите си, но газът като цяло се характеризира с величината средна стойност на квадрата на скоростта $\overline{v^2}$, чиято стойност за дадено равновесно състояние на газа е точно определена и може да се пресметне от формула (32.9), след като експериментално се измери налягането p и се определи броят на молекулите в единица обем на газа N/V .

Вътрешно налягане

При извода на уравнение (32.9) не отчитаме два фактора: ударите на молекулите в останалите стени на съда и ударите между самите молекули. Очевидно първият фактор не оказва никакво влияние на получения резултат – при удар в околните стени на паралелепипеда (фиг.32-1) x -компонентата на скоростта не се променя. В резултат на ударите помежду си молекулите непрекъснато променят големината и посоката на скоростта си, т.е. пре-



Фиг.32-2.

минават от една група в друга група. Тъй като молекулите са еднакви, в случая няма значение кои точно молекули се намират в една или друга скоростна група. От значение е единствено средният брой на молекулите във всяка група. В състояние на равновесие средният брой на молекулите от всяка група не се променя с времето. Следователно след отчитане на ударите между молекулите трябва да се получи същият резултат (32.9) за налягането на газа. Отчитането на ударите обаче води до една по-обща интерпретация на налягането на газа – не само като налягане върху стените на съда, а и като мярка за силовото взаимодействие между два произволни макроскопични обема от газа, разделени с обща повърхност. Нека на пример мислено отделим някакъв обем V от газа (фиг.32-2). Повърхността S , която отделя обема V от останалия газ, може да се разглежда като стена на съд, върху която газът от обема V оказва налягане p , чиято големина се определя от уравнение (32.9). Аналогични разсъждения могат да се направят за другата част от газа – тя оказва същото налягане p върху външната страна на повърхността S . Следователно уравнение (32.9) изразява не само налягането върху стените на съда, но и вътрешното налягане във всяка точка от обема на газа, т.е. величината p има същия смисъл, както налягането в механиката на флуидите.

Температура

Общият брой на молекулите на газа е $N = nN_A$, където n е броят на моловете, а N_A е числото на Авогадро. Заместваме N в уравнение (32.9) и получаваме

$$(32.10) \quad pV = \frac{2}{3} nN_A \overline{mv^2},$$

където $\frac{\overline{mv^2}}{2}$ е средната кинетична енергия на постъпателно движение на една молекула от газа. От уравнение (32.10) и от уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = nRT$ изразяваме средната кинетична енергия на постъпателно движение на молекулите

$$(32.11) \quad \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT,$$

където

$$k = \frac{R}{N_A} = (1,380\,658 \pm 0,000\,012) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

е една от фундаменталните физични константи, наречена в чест на австрийския физик Людвиг Болцман (1844–1906) *константа на Болцман*.

От уравнения (32.11) и (32.9) за налягането на идеалния газ се получава

$$(32.12) \quad p = \frac{N}{V} kT = n_v kT.$$

Следователно налягането на газа е право пропорционално на броя на молекулите в единица обем $n_v = N/V$ и на абсолютната температура T на газа. От друга страна, уравнение (32.11) показва, че абсолютната температура T на идеалния газ е право пропорционална на средната кинетична енергия на постъпателно движение на неговите молекули. Колкото по-голяма е енергията на хаотичното топлинно движение, толкова по-висока е температурата. Следователно от гледна точка на молекулно-кинетичната теория температурата е мярка за интензивността на топлинното движение. При дадена температура молекулите на всички газове имат еднаква средна кинетична енергия на постъпателно движение. Средните квадратични скорости обаче са различни. От уравнение (32.11) следва, че в газова смес, намираща се при определена температура, най-бързо се движат най-леките молекули, а най-бавно – молекулите с най-голяма маса.

Съгласно с уравнение (32.11) при приближаване на абсолютната нула средната кинетична енергия на молекулите също клони към нула. Ще подчертаем, че този

извод е верен за идеалния газ. Реалните газове при охлаждане първо се втечняват, а след това течностите се втвърдяват. Според квантовата теория, при приближаване на абсолютната нула кинетичната енергия на молекулите в твърдите тела се стреми към някаква характерна за даденото вещество стойност, която е различна от нула.

Пример 32.1. Колко е средната квадратична скорост на молекулите на водорода (H_2) и на кислорода (O_2) във въздуха при стайна температура (300 K)?

Решение. От уравнение (32.11) изразяваме средната квадратична скорост на молекулите на идеален газ

$$\bar{v}_{\text{кв.}} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

За водорода ($m = 3,34 \cdot 10^{-27}$ kg):

$$\bar{v}_{\text{кв.}}(H_2) = \sqrt{\frac{3(1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 1930 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Молекулите на кислорода имат 16 пъти по-голяма маса. Затова тяхната средна квадратична скорост е $\sqrt{16} = 4$ пъти по-малка

$$\bar{v}_{\text{кв.}}(O_2) = \frac{\bar{v}_{\text{кв.}}(H_2)}{4} \approx 480 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Пример 32.2. Определете вътрешната енергия $U = 2$ mol хелий при температура $T = 300$ K. Разгледайте хелия като идеален газ, чийто молекули извършват само постъпателно движение.

Решение. Вътрешната енергия U на идеалния газ е равна на сумата от кинетичните енергии на всички молекули. Молекулите на хелия извършват само постъпателно движение, затова вътрешната му енергия е равна на средната кинетична енергия на постъпателно дви-

жение на една молекула $\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$, умножено по броя на молекулите N

$$U = N\left(\frac{3}{2}kT\right) = \frac{3}{2}nN_AkT = \frac{3}{2}nRT,$$

където последователно сме отчели, че $N = nN_A$

и $N_Ak = R$, където R е универсалната газова константа.

$$U = \frac{3}{2}(2 \text{ mol})(8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}})(300 \text{ K}) = 7,5 \text{ kJ}.$$

Задачи

1. Идеален газ се нагрява при постоянен обем, при което средната кинетична енергия на постъпателно движение на молекулите му нараства 2 пъти. Как се е изменило налягането на газа?

2. Налягането на остатъчните газове във вакуумна камера с обем $V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ е $p = 2 \cdot 10^{-6}$ Pa. Колко е броят на газовите молекули в камерата, ако средната кинетична енергия на постъпателно движение на една молекула е $4 \cdot 10^{-22}$ J?

3. Като използвате уравнение (32.11), покажете, че средната квадратична скорост на молекулите на идеален газ е равна на

$$\bar{v}_{\text{кв.}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

където M е моларната маса на газа.

4. Температурата на повърхността на Слънцето е около 6000 K. От спектралните изследвания на слънчевата светлина е известно, че на повърхността на Слънцето се срещат повечето от елементите на периодичната система във вид на атомарни газове.

а) Колко джаула е средната кинетична енергия на постъпателно движение на атомите на тези газове?

б) В какъв диапазон са средните квадратични скорости на постъпателно движение на атомите, като се започне от водорода ($M = 1 \text{ g/mol}$) и се стигне до урана ($M = 238 \text{ g/mol}$)?

5. При каква температура молекулите на хелия ($M(\text{He}) = 0,004 \text{ kg/mol}$) имат същата средна квадратична скорост, както молекулите на водорода ($M(H_2) = 0,002 \text{ kg/mol}$) при 27°C ?

6. Когато температурата на идеален газ нарастала с $\Delta T = 300$ K, средната квадратична скорост на молекулите му се увеличила 2 пъти. Колко келвина е била началната температура на газа?

7. Идеален газ, който се намира при налягане $p = 3 \cdot 10^4$ Pa, има плътност $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$. Колко метра в секунда е средната квадратична скорост на молекулите на газа?

33. Класическа теория на топлинните капацитети

Степени на свобода

В класическата молекулно-кинетична теория атомите се разглеждат като материални точки, а всяко макроскопично тяло – като система от материални точки, чието движение и взаимодействие се описва от законите на класическата механика. Броят на независимите координати, чрез които може еднозначно да се определи положението на всички материални точки от една механична система, се нарича брой на степените на свобода на системата.

Например в пространството положението на материална точка се задава с трите ѝ декартови координати x , y и z , т.е. съгласно с даденото определение тя има три степени на свобода. Система от N материални точки, на чието движение не са наложени допълнителни ограничения (връзки), има $3N$ степени на свобода: по 3 за всяка материална точка.

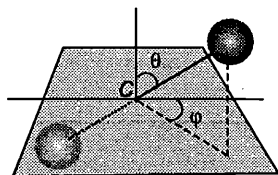
Двуатомна молекула може да се разглежда като система от две материални точки, между които съществува твърда връзка – разстоянието между материалните точки не се изменя при движението на молекулата. Подобно на твърдо тяло, положението на молекулата в пространството е точно определено, ако са зададени (фиг.33-1):

а) координатите x , y , z на центъра на масите C на молекулата;

б) ъглите θ и φ , които правата, минаваща през двата атома, сключва с две взаимно перпендикулярни оси, пресичащи се в центъра на масите C .

Декартовите координати x , y , z и ъглите θ и φ определят петте степени на свобода на молекулата: три степени на сво-

Фиг.33-1.



бода на постъпателно движение и две степени на свобода на въртене.

Според друг механичен модел на двуатомна молекула връзката между атомите не е твърда, а е еластична. Съгласно с този модел под външно въздействие може да се измени големината на разстоянието между атомите, при което възникват еластични сили на взаимодействие и атомите извършват трептене около центъра на масите C . Такава молекула има допълнителна степен на свобода на трептене.

Равномерно разпределение на енергията по степени на свобода

В статистическата физика се доказва следната теорема за разпределението на кинетичната енергия между частиците на равновесна термодинамична система:

На всяка степен на свобода на една частица съответства еднаква средна кинетична енергия, равна на $\frac{1}{2}kT$, където T е абсолютната температура, а k е константата на Болцман.

С помощта на теоремата за равномерно разпределение на енергията по степени на свобода се определя средната енергия $\bar{\epsilon}$ на топлинно движение на частиците, ако се знае абсолютната температура T и броят i на степените на свобода

$$(33.1) \quad \bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT.$$

Например частиците на едноатомен газ (He , Ne , Ar и др.) могат да се разглеждат като материални точки с $i = 3$ степени на свобода и средна кинетична енергия

на топлинно движение $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$.

Молекулите на двуатомните газове (H_2 , N_2 , O_2 и др.), когато не извършват трептения (молекули с твърда връзка), имат $i = 5$ степени на свобода. Средната кинетична енергия на постъпателно и въртливо

движение на такава молекула е $\bar{\epsilon} = \frac{5}{2} kT$.

Трептенията се характеризират както с кинетична, така и с потенциална енергия. Затова на тази степен на свобода

съответства средно два пъти по-голяма енергия: $kT/2$ кинетична енергия и $kT/2$ потенциална енергия. Следователно двуатомна молекула, която освен постъпателно и въртливо движение извършва и трептене (молекула с еластична връзка), има

средна енергия $\bar{\epsilon} = \frac{7}{2} kT$, т.е. за нея $i = 7$.

(В случая i е сумата от степените на свобода на постъпателно движение, на въртливо движение и от удвоения брой на степените на свобода на трептене.)

Топлинни капацитети на идеален газ

Броят на молекулите в n mol идеален газ е $N = nN_A$, където N_A е числото на Авогадро. Всяка молекула има средна кинетична

енергия $\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT$. Тъй като при идеалния газ се пренебрегва потенциалната енергия на взаимодействие между молекулите, вътрешната енергия U на газа е сума от кинетичните енергии на отделните молекули

$$(33.2) \quad U = N\bar{\epsilon} = nN_A \frac{i}{2} kT.$$

Заместяваме $N_A k = R$ и за вътрешната енергия на n mol идеален газ получаваме

$$(33.3) \quad U = \frac{i}{2} nRT.$$

От уравнение (33.3) определяме моларния топлинен капацитет на идеалния газ при постоянен обем C_V

$$(33.4) \quad C_V = \frac{dU}{ndT} = \frac{i}{2} R.$$

Изобарният моларен капацитет C_p се определя от формула (33.4) и от уравнението на Майер (31.9)

$$(33.5) \quad C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2} R.$$

От равенства (33.4) и (33.5) изразяваме показателя на адиабатата γ (коэффициент на Поасон – вж. стр.172)

$$(33.6) \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

За едноатомен газ: $i = 3$ и $\gamma = 5/3 = 1,667$. За двуатомен газ с твърда връзка между атомите в молекулата (атомите не

трептят): $i = 5$ и $\gamma = 7/5 = 1,4$.

Тези теоретични стойности за коефициента на Поасон се съгласуват много добре с експерименталните стойности, измерени при стайна температура и нормално атмосферно налягане (табл.33.1).

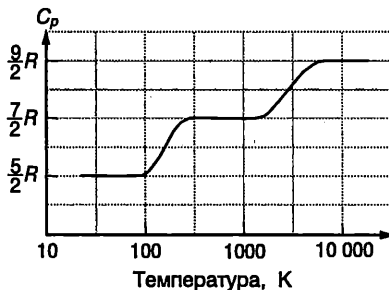
Таблица 2.1. Експериментални стойности на коефициента на Поасон γ за някои газове при температура $T = 293$ K и нормално атмосферно налягане.

Едноатомен газ	γ	Двуатомен газ	γ
Хелий (He)	1,660	Водород (H ₂)	1,407
Неон (Ne)	1,64	Азот (N ₂)	1,398
Аргон (Ar)	1,65	Кислород (O ₂)	1,398

Понятие за квантова теория на топлинните капацитети

От класическата молекулно-кинетична теория следва, че топлинните капацитети C_V и C_p на идеалния газ са правопрпорционални на универсалната газова константа R и не зависят от температурата. Тяхната стойност се определя от броя на степените на свобода i на газа. Този извод обаче не се съгласува с експерименталните резултати. На *фиг.33-2* е показана графика на експериментално получената температурна зависимост на изобарния моларен топлинен капацитет C_p на водорода (H₂). Вижда се, че стойността на C_p нараства стъпаловидно с повишаване на температурата. За да обясни тази зависимост, класическата теория прави изкуственото предположение, че при ниски температури степените на свобода на въртливо движение и трептене на двуатомни

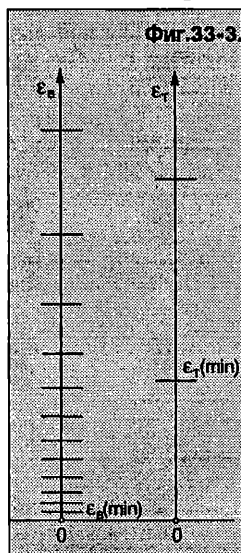
Фиг.33-2. Температурна зависимост на изобарния моларен топлинен капацитет на водорода (H₂).



те и многоатомните молекули са „замразени“ – при ниски температури молекулите могат да извършват само постъпателно движение, на което съответстват $i = 3$ степени на свобода и $C_p = 5R/2$. При повишаване на температурата отначало се „размразяват“ степените на свобода на въртене и C_p нараства на $7R/2$. При много високи температури се „размразяват“ и степените на свобода на трептене. Съгласно с използваните по-горе механични модели на молекулата това означава, че връзката между двата атома се променя от твърда връзка в еластична връзка, поради което топлинният капацитет C_p нараства на $9R/2$. Класическата теория обаче не е в състояние да обясни това необичайно прекратяване на трептенията и въртеливото движение на молекулите при ниски температури. Отговор на тази загадка дава квантовата теория. В квантовата механика се доказва, че енергията ϵ_v на въртеливо движение на молекулите, както и тяхната енергия на трептене ϵ_r , се квантува. Това означава, че: 1. енергията може да има само определени дискретни стойности, които са отделени една от друга от забранени енергетични интервали; 2. съществува минимална енергия на въртене $\epsilon_v(\min)$ и минимална енергия на трептене $\epsilon_r(\min)$.

Дискретният набор от разрешени стойности за енергията на въртене ϵ_v и на енергията на трептене ϵ_r е показан схематично на *фиг. 33-3*.

В процеса на взаимодействие (удар) помежду си две молекули могат да обменят енергия, която е от порядъка на средната енергия на kT на топлинното движение. Да допуснем, че газът се намира при ниска температура, където е в сила неравенството $kT \ll \epsilon_v(\min) < \epsilon_r(\min)$. Тогава енергията kT не е достатъчна, за да се



възбуди въртене или трептене на молекулите. (Ще отбележим, че дори при $T = 0$ К молекулите извършват т. нар. нулеви квантово-механични трептения. Тези трептения обаче не зависят от температурата и не дават принос в топлинния капацитет.)

При увеличаване на температурата отначало се възбужда въртене на молекулите с минималната възможна енергия $\epsilon_v(\min)$, а след това и с по-големите разрешени енергии. При достатъчно висока температура, когато $kT \gg \epsilon_v(\min)$, вече има молекули с най-различна енергия на въртене, съответстваща на много голям брой от разрешените енергетични нива. Тогава дискретността на енергетичния спектър практически престава да влияе на топлинните капацитети, които достигат стойности, съответстващи на класическия идеален газ с пет степени на свобода.

При по-нататъшно увеличаване на температурата става възможно да се възбудят и трептения – отначало с минималната разрешена енергия $\epsilon_r(\min)$, а след това и с по-големи енергии. При много високи температури, когато $kT \gg \epsilon_r(\min)$, в газа се срещат молекули с най-различни енергии на трептене, съответстващи на голям брой от енергетичните нива на трептене и дискретният спектър на енергията на трептене практически престава да влияе на топлинните капацитети: изобарният моларен топлинен капацитет C_p на двуатомния газ достига стойност $9R/2$, съответстваща на класическия идеален газ с $i = 7$ (*фиг.33-2*).

Задачи

1. 3 mol двуатомен идеален газ ($i = 5$) се нагрява при постоянен обем. Колко джаула количество топлина е необходимо, за да се повиши температурата на газа с 50 K?
2. Два мола едноатомен идеален газ се разширява при постоянно налягане, при което температурата на газа нараства с $\Delta T = 50$ K. Пресметнете: а) изменението на вътрешната енергия на газа; б) погълнатото от газа количество топлина; в) работата на газа.
3. Пресметнете вътрешната енергия на 1 kg въздух с температура 300 K. Разгледайте въздуха като двуатомен идеален газ с моларна маса 0,029 kg/mol, чийто молекули извършват само постъпателни и въртеливи движения.

34. Разпределения на Максвел и на Болцман

Функция на разпределение

В §32 въведохме величината средна квадратична скорост на молекулите, която е една от макроскопичните характеристики на топлинното движение. В резултат на ударите индивидуалните скорости на молекулите непрекъснато се променят – едни молекули се ускоряват, а други се забавят. Също така бързо се изменя посоката на движение и взаимното разположение на молекулите. Поради огромния брой на молекулите, не е възможно да се проследи индивидуалното движение на всяка от тях. Не е възможно това да се направи дори само за една молекула. Затова задачата на молекулно-кинетичната теория е да установи средното разпределение на молекулите по скорости и в пространството.

По принцип са възможни най-различни разпределения на молекулите. Ето три примера:

1. Всички молекули се движат в една и съща посока с еднакви скорости.

2. Всички скорости са еднакви по големина, но имат различни посоки.

3. Молекулите от едни области имат по-големи скорости, а от други области – по-малки скорости.

Статистическата теория доказва, че между всички възможни разпределения съществува едно, чиято вероятност е несъизмеримо по-голяма от вероятността за всички други видове разпределения, поради което единствено то се реализира на практика. Това е разпределението, което съответства на състоянието на термодинамично равновесие. При отсъствие на външни силови полета равновесното, „абсолютно хаотично“ разпределение на молекулите на идеален газ има следните характеристики:

1. Не се изменя с течение на времето.

2. Във всички равни по големина макроскопични обеми от газа се намират средно еднакъв брой молекули, т.е. концентрацията на молекулите навсякъде е еднаква.

3. Във всички макроскопични обеми от газа разпределението на молекулите по скорости е еднакво. Например, ако в даден обем V_1 има N_1 молекули, които се движат със скорост v , то в произволна друга област от пространството, заета от газа, която има същия обем V_1 , средно същият брой N_1 молекули се движат със същата скорост v .

4. Всички посоки на движение са равновероятни. Това означава, че във всеки макроскопичен обем на газа средният брой на молекулите с дадена (произволно избрана) скорост v е равен на средния брой на молекулите със същата по големина, но противоположна по посока скорост $-v$.

През 1859 г. британският физик Джеймс Кларк Максвел (1831–1879) доказва, че за идеален газ, подчиняващ се на законите на класическата механика, в равновесно състояние, т.е. когато се изпълняват условия 1–4, средният брой dN на молекулите, чиято големина на скоростта лежи в интервала от v до $v + dv$, е

$$(34.1) \quad dN = NF(v)dv,$$

където N е общият брой на молекулите, а $F(v)$ е функцията на разпределение на молекулите по големина на скоростта.

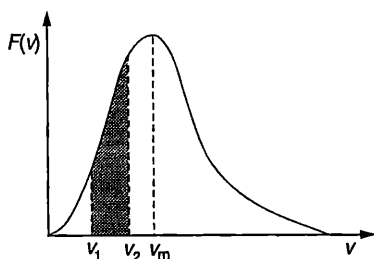
За функцията $F(v)$ Максвел получава израза

$$(34.2) \quad F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right),$$

където k е Болцмановата константа, m – масата на една молекула, а T – абсолютната температура. Формула (34.2) изразява закона на Максвел за разпределение на молекулите по скорости. Произведението $F(v)dv$ дава вероятността големината на скоростта на една молекула да попада в интервала от v до $v + dv$. Графиката на функцията $F(v)$ е представена на *фиг.34-1*. За да се определи графично каква част от молекулите имат скорости в интервала $\Delta v = v_2 - v_1$, трябва да се измери площта на сивия трапец от *фиг.34-1* и да се раздели на площта на фигурата, заключена между графиката на функцията $F(v)$ и абсцисната ос v .

От графиката се вижда, че:

1. При $v = 0$, $F(0) = 0$. Отначало функ-



Фиг.34-1. Функция на разпределение на молекулите по големината на скоростта $F(v)$.

цията $F(v)$ нараства с увеличаване големината на скоростта v , преминава през максимум, след това намалява и клони към нула при големи стойности на скоростта v .

2. Скоростта v_m , при която функцията на разпределение на молекулите по големина на скоростта $F(v)$ има максимум, се нарича *най-вероятна скорост*. Това е скоростта, която се среща по-често от всички останали скорости на молекулите.

3. Само незначителна част от молекулите имат скорости, които са много по-малки или много по-големи от най-вероятната скорост v_m .

4. Голяма част от молекулите имат скорости, които са близки до най-вероятната скорост. Затова в много задачи с приближение може да се приеме, че всички молекули се движат с една и съща скорост.

Пример 34.1. Пресметнете най-вероятната скорост на молекулите на кислорода (O_2) при температура $T = 300$ K. Моларната маса на кислорода е $M = 0,032$ kg/mol.

Решение. Най-вероятната скорост v_m се определя от закона на Максвел за разпределение на молекулите по скорости. Намираме първата производна на функцията $F(v)$ (34.2) и я приравняваме на нула

$$F'(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2v - \frac{2mv^3}{2kT} \right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = 0,$$

откъдето получаваме, че функцията $F(v)$ има екстремум (максимум) при

$$(34.3) \quad v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Умножаваме числителя и знаменателя на дясната страна на равенство (34.3) по число-

то на Авогадро N_A и получаваме

$$(34.4) \quad v_m = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

където сме отчели, че $kN_A = R$ и $mN_A = M$.

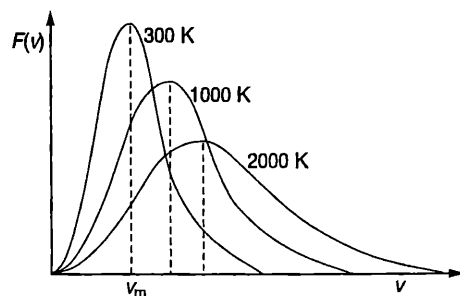
Формули (34.3) и (34.4) показват, че най-вероятната скорост е право пропорционална на квадратен корен от абсолютната температура и е обратно пропорционална на квадратен корен от масата на молекулите (моларната маса на газа).

Търсената стойност на най-вероятната скорост v_m е

$$v_m = \sqrt{\frac{2(8,3 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{0,032 \text{ kg/mol}}} = 394 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Зависимост на $F(v)$ от температурата

Максвеловото разпределение на молекулите по скорости зависи от температурата T . На *фиг.34-2* е показана графиката на функцията на Максвел $F(v)$ при три различни температури. Вижда се, че при повишаване на температурата максимумът на кривите се отстранява към по-големите скорости – нараства най-вероятната скорост, което съответства на факта, че при нагряване на газа молекулите се движат с по-големи скорости. Освен това при високи температури височината на максимума намалява и кривите стават по-широки, т.е. разпределението на молекулите по скорости става по-равномерно.



Фиг.34-2.

Средни скорости

Средната аритметична скорост $\bar{v}$ на молекулите се определя като се сумират големините на скоростите на всички молекули и получената сума се раздели на об-

ция брой N на молекулите. Тъй като броят на молекулите е много голям, разпределението им по скорости се задава с непрекъснатата функция $F(v)$, а сумирането се заменя с интегриране. Тогава по определение средна аритметична скорост се нарича величината

$$(34.5) \quad \bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN = \int_0^{\infty} v F(v) dv,$$

където $dN = NvF(v)$ е броят на молекулите с големина на скоростта в интервала от v до $v + dv$, а $v dN$ е сумата от модулите на скоростите на тези dN молекули. След заместване на функцията $F(v)$ от уравнение (34.2) в (34.5) и интегриране по части, за средната аритметична скорост на молекулите се получава (вж. пример 34.2):

$$(34.6) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

И така, хаотичното топлинно движение на молекулите на идеалния газ се характеризира с три макроскопични величини: средна аритметична скорост $\bar{v}$, средна квадратична скорост $\bar{v}_{\text{кв.}}$ и най-вероятна скорост v_m . Трите скорости се различават помежду си само с числен множител от порядъка на единица

$$(34.7) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = v_m \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 1,13 v_m;$$

$$(34.8) \quad \bar{v}_{\text{кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = v_m \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22 v_m.$$

При решаването на задачи често се прилагат опростени модели, в които се приема, че всички молекули на идеалния газ имат еднакви по големина скорости на хаотично топлинно движение. При тези приближения пресмятания за характеризиране на газа може да се използва всяка една от горните три скорости.

***Пример 34.2.** Да се получи формула (34.6) за средната аритметична скорост на молекулите на идеален газ.

Решение. От уравнение (34.2) заместваме функцията на разпределение на молекулите по големина на скоростта $F(v)$ във формула

(34.5), чрез която се дефинира величината средна аритметична скорост:

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Вкарваме експонентата под знака на диференциала и интегрираме по части

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv &= \\ &= -\int_0^{\infty} \left(\frac{2kT}{2mv}\right) v^3 d\left[\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right] = \\ &= -\frac{kT}{m} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \Big|_0^{\infty} + \frac{kT}{m} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv^2 = \\ &= 0 + 2\left(\frac{kT}{m}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\left(\frac{mv^2}{2kT}\right) = 2\left(\frac{kT}{m}\right). \end{aligned}$$

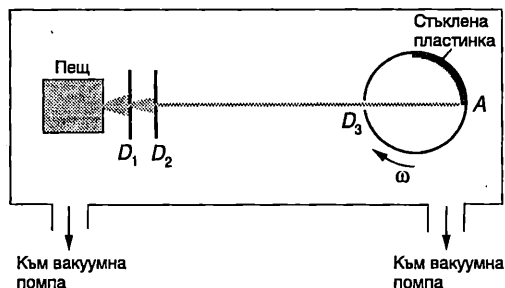
Средната аритметична скорост е

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 2\left(\frac{kT}{m}\right) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. *$$

Експериментална проверка на закона на Максвел

На *фиг.34-3* схематично е показана една от опитните постановки, с които се изследва разпределението на молекулите по скорости. В нагрятата пещ се поставя метал с ниска температура на топене. Нейният обем се запълва с пари на метала, които могат да се разглеждат като идеален газ. В стената на пещта е направен отвор, кой-

Фиг.34-3. Експериментална проверка на закона за разпределение на молекулите на идеалния газ по големина на скоростта.



то е толкова малък, че практически не влияе на разпределението на молекулите по скорости, т.е. молекулите, които напускат пещта през отвора, имат същото разпределение по големина на скоростта, както молекулите вътре в пещта. След това молекулите преминават през две диафрагми D_1 и D_2 , които формират тесен молекулен сноп. През тесен отвор D_3 снопът влиза в цилиндър с диаметър d , въртящ се с ъглова скорост ω . Към вътрешната стена на цилиндъра е прикрепена огъната в дъга стъклена пластинка. Цялата опитна постановка се намира във вакуумна камера, за да се предотвратят удари на молекули от снопа с молекулите на въздуха.

Ако се движеха с безкрайно голяма скорост, молекулите щяха да попаднат в точка A от пластинката (фиг.34-3). Молекула, чиято скорост е v , пресича цилиндъра по неговия диаметър за време $t = d/v$. За същото време цилиндърът се завърта на ъгъл $\phi = \omega t = \omega d/v$ и молекулата ще попадне върху пластината на разстояние

$$s = \phi \frac{d}{2} = \frac{\omega d^2}{2v} \text{ от точка } A. \text{ Колкото по-малка е скоростта на дадена молекула, толкова по-далеч от точка } A \text{ ще попадне тя.}$$

Така върху стъклената пластинка се отлага тънък метален слой, чиято дебелина е пропорционална на броя на молекулите, попаднали на даденото място. Ако се предположи, че разпределението на молекулите в снопа по скорости съответства на Максвеловото разпределение, лесно може да се пресметне зависимостта на дебелината на слоя от разстоянието s и да се сравни с резултатите от експеримента. Изследванията, проведени с молекулни снопове от живак, кадмий, талий, бисмут и други метали показват, че разпределението на молекулите по големина на скоростта съответства на получената от Максвел по теоретичен път функция $F(v)$.

Барометрична формула

В отсъствие на външни силови полета налягането p и средната концентрация $n_v = N/V$ на молекулите са еднакви в целия обем на газа. Картината обаче се променя, когато газът се постави във външно поле. Например въздухът в атмосферата

се намира в полето на силата на тежестта и, както е известно, налягането намалява с височината h . За да пресметнем зависимостта $p(h)$, ще разгледаме земната атмосфера като идеален газ, намиращ се в състояние на термодинамично равновесие с определена температура T . Такъв модел на атмосферата се нарича изотермен. Нека на височина h в изотермна атмосфера мислено да отделим малък цилиндричен обем от газа с лице на основата S и височина dh (фиг.34-4). На отделения обем действа силата на тежестта

$$mg = \rho Vg = \rho Sdhg,$$

където ρ е плътността на въздуха, а g – земното ускорение. Освен това околният въздух действа на отделения обем със сили на нормален натиск. При механично равновесие силата на тежестта се уравновесява от силите на нормален натиск

$$\rho g S dh = (p(h) - p(h + dh))S.$$

Съкращаваме S и заместваме израза в скобите с $-dp$. (Изменението на налягането при увеличаване на височината с dh е $dp = p(h + dh) - p(h)$.) Получаваме

$$(34.9) \quad \rho g dh = -dp.$$

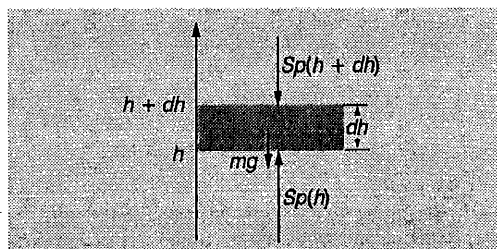
Изразяваме плътността на въздуха от уравнението за състоянието на идеалния

газ $\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$ и я заместваме в горното уравнение

$$(34.10) \quad \frac{Mp}{RT} g dh = -dp \text{ или } \frac{gM}{RT} dh = -\frac{dp}{p}.$$

След непосредствено интегриране на диференциалното уравнение (34.10) и отчитане на граничното условие, че върху земната повърхност, т.е. при $h = 0$, атмо-

Фиг.34-4.



сферното налягане е p_0 , се получава

$$(34.11) \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{gMh}{RT}\right).$$

Уравнение (34.11) се нарича *барометрична формула*. Барометричната формула показва, че в рамките на модела на изотермната атмосфера налягането p на въздуха намалява по експоненциален закон с височината h . Ще отбележим, че в реалната земна атмосфера протичат сложни неравновесни процеси, поради което температурата в различните ѝ слоеве е различна. Затова барометричната формула само с приближение описва зависимостта $p(h)$.

Пример 34.3. Като използвате модела на изотермната атмосфера, пресметнете атмосферното налягане в София. На морското равнище налягането е $p_0 = 760$ mm Hg стълб. София се намира на надморската височина $h = 550$ m. Моларната маса на въздуха е $M = 0,029$ kg/mol, температурата е $T = 300$ K.

Решение. Заместваме данните от условието на задачата в барометричната формула (34.11) и получаваме

$$\begin{aligned} p &= p_0 \exp\left(-\frac{gMh}{RT}\right) = \\ &= (760 \text{ mm Hg}) \exp\left(-\frac{(0,029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}})(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(550 \text{ m})}{(8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}})(300 \text{ K})}\right) \\ &= 714 \text{ mm Hg.} \end{aligned}$$

Болцманово разпределение

Заместваме в барометричната формула: $p = n_V kT$ (вж. уравнение (32.12) на стр.177), където $n_V = N/V$ е концентрацията на молекулите; $M = N_A m$, където m е масата на една молекула; $R = kN_A$. Получаваме

$$(34.12) \quad n_V = n_{V0} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n_{V0} \exp\left(-\frac{\epsilon_p}{kT}\right),$$

където $n_{V0} = p_0/kT$ е концентрацията на молекулите на земната повърхност (при $h = 0$), а $\epsilon_p = mgh$ е потенциалната енергия

на една молекула в полето на силата на тежестта. Зависимостта (34.12) на концентрацията на молекулите от височината се определя от два конкуриращи се фактора: земното привличане и хаотичното топлинно движение. Под действие на земното привличане молекулите се стремят да се съберат върху земната повърхност, т.е. да заемат положение с минимална потенциална енергия ϵ_p . От друга страна, в резултат на хаотичното топлинно движение и ударите голяма част от молекулите имат скорост, насочена нагоре. Те преодоляват земната гравитация и се издигнат, като част от кинетичната им енергия се преобразува в гравитационна потенциална енергия. Колкото по-голяма е кинетичната енергия на молекулите (средната кинетична енергия е пропорционална на kT), толкова по-слабо влияние ще оказва силата на тежестта и по-равномерно ще са разпределени молекулите, т.е. концентрацията по-бавно ще намалява с височината h .

И така, в отсъствие на външно силово поле концентрацията n_V на молекулите на идеалния газ навсякъде е еднаква. Когато газът се намира в еднородното поле на силата на тежестта, концентрацията n_V зависи по експоненциалния закон (34.12) от потенциалната енергия ϵ_p на молекулите. В периода 1868–1871 г. Л. Болцман доказва, че формулата

$$(34.13) \quad n_V = n_{V0} \exp\left(-\frac{\epsilon_p}{kT}\right)$$

е в сила и за идеален газ, който се намира в произволно потенциално силово поле. (В случая n_{V0} е концентрацията на молекулите, там където потенциалната им енергия е $\epsilon_p = 0$). При това полето може да е нееднородно и не е от значение физическата му природа. Трябва обаче полето да е потенциално, т.е. външните сили, действащи на молекулите на газа да са консервативни. Доказва се, че в случай на неконсервативни сили не е възможно механично равновесие на газа.

Формула (34.13) изразява закона на Болцман за разпределението на концентрацията на молекулите на идеален газ, намиращ се в потенциално външно поле. Болцман също така доказва, че външните

полета не влияят на разпределението на молекулите по скорости. В състояние на термодинамично равновесие разпределението по скорости се подчинява на закона на Максвел (34.2). Външните полета променят само концентрацията на молекулите, която зависи от потенциалната енергия на молекулите и се изменя съгласно с Болцмановото разпределение (34.13).

Понятие за квантовите разпределения

Разпределенията на Максвел и на Болцман са основните разпределения в класическата физика. Те се основават на две предположения: 1. хаотичният характер на топлинното движение; 2. движението и взаимодействието на молекулите се описва от законите на класическата механика.

Квантовата статистика отчита квантовите свойства на микрочастиците, например дискретния характер на техния енергетичен спектър, тъждествеността (пълната неразличимост) на частиците от даден вид и др. Освен познатите силови взаимодействия, еднаквите микрочастици от една макросистема оказват особено влияние една на друга, което е свързано с тяхната тъждественост и се характеризира с величината *спин*. В зависимост от спина микрочастиците се разделят на *фермиони* и *бозони*. За идеален газ, съставен от фермиони, е в сила принципът на Паули: в едно и също квантово състояние не могат да се намират едновременно два фермиона. За бозоните такова ограничение не съществува. Идеалните газове от бозони или фермиони се характеризират с различни квантови разпределения, наречени съответно разпределение на Бозе и разпределение на Ферми. Запознаването с техния аналитичен вид и характерни особености излиза извън рамките на тази книга. Ще отбележим само, че при повишаване на температурата квантовите свойства на микрочастиците започват да играят все по-малка роля и при достатъчно висока температура квантовите разпределения добиват вид, който е аналогичен на класическите разпределения на Максвел и Болцман. Например за водорода преминаването от квантово към

класическо разпределение на молекулите става при температура около 30 K, докато квантовите свойства на електронния газ в металите играят определяща роля дори при температура 10 000 K.

Задачи

1. Идеален газ се намира при температура 27 °C. До каква температура трябва да се нагрее газът, за да нарасне 2 пъти най-вероятната скорост на молекулите му?
2. При температура T_1 средната аритметична скорост на молекулите на идеален газ е равна на най-вероятната скорост на молекулите на същия газ при температура T_2 . Колко е отношението T_1/T_2 на двете температури?
3. При каква температура средната квадратична скорост на молекулите на водорода е с $\Delta v = 100$ m/s по-голяма от тяхната най-вероятна скорост?
4. При каква температура разликата между средните аритметични скорости на молекулите на азота и на кислорода във въздуха е $\Delta v = 40$ m/s?
5. При каква температура на молекулите на водорода със скорости $v_1 = 500$ m/s и $v_2 = 1000$ m/s съответства една и съща стойност на функцията на разпределение на молекулите по големина на скоростта, $F(v_1) = F(v_2)$?
6. Сравнете концентрацията n_n на молекулите на въздуха на високопланински връх с височина 7000 m с концентрацията им n_0 на морското равнище. Приемете, че атмосферата се намира при постоянна температура $T = 273$ K. Моларната маса на въздуха е $M = 0,029$ kg/mol.
7. а) Като използвате барометричната формула, докажете, че частта f от молекулите на въздуха от атмосферата на Земята, намиращи се във въздушен слой с височина h , обвиващ земната повърхност, е

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

- б) Колко метра е височината h на най-плътния слой от земната атмосфера, в който се намират половината от всички молекули на въздуха? Приемете, че атмосферата се намира при постоянна температура $T = 270$ K. Моларната маса на въздуха е $M = 0,029$ kg/mol, земното ускорение е $g = 9,8$ m/s².

35. Преносни явления

Досега изучавахме само равновесното състояние и равновесните процеси в термодинамичните системи. Когато се наруши равновесието, в системата се наблюдават преносни явления – възникват макроскопични потоци, които пренасят импулс, енергия или частици. Преносните явления се изучават от физичната кинетика. Ще се спрем на три от тях: вътрешно триене, топлопроводност и дифузия.

Средна дължина на свободния пробег

Ще разгледаме идеален газ, съставен от еднакви молекули. Средното разстояние λ , което една молекула изминава между два последователни удара с други молекули, се нарича *средна дължина на свободния пробег* на молекулите. Средното време τ между два удара се нарича *средно време на свободния пробег* на молекулите. Величините λ и τ са свързани със съотношението

$$(35.1) \quad \lambda = \bar{v}\tau,$$

където $\bar{v}$ е средната аритметична скорост на молекулите. За да оценим средната дължина на свободния пробег на молекулите на идеалния газ, ще разгледаме следния най-прост модел: Приемаме молекулите за твърди сфери с диаметър d , равен на ефективния диаметър на молекулите. Ще припомним, че ефективен диаметър се нарича разстоянието между центровете на две молекули, при което силите на отблъскване рязко нарастват и взаимодействието на молекулите може да се разглежда като еластичен удар. Нека мислено “замразим” всички молекули, с изключение на една, в положението, в което се намират в даден момент. Ще смятаме, че избраната молекула се движи праволинейно и равномерно със скорост $\bar{v}$ и при ударите „отмества“ от пътя си всички молекули (сфери), до които се докосва. За време t молекулата ще се удари във всички молекули, чиито центрове лежат в цилиндър с радиус на основата d и дължина $\ell = \bar{v}t$ (фиг.35-1). Броят на ударите е

$$(35.2) \quad z = n_v \pi d^2 \bar{v} t,$$

където n_v е концентрацията на газа.

Средното време между два удара е

$$(35.3) \quad \tau = \frac{t}{z} = \frac{1}{\pi d^2 n_v \bar{v}} = \frac{1}{\sigma n_v \bar{v}}.$$

Величината $\sigma = \pi d^2$ характеризира удара между две молекули и се нарича *ефективно сечение на разсейване*. Когато двете молекули имат различни диаметри d_1 и d_2 , ефективното сечение на разсейване се изразява с формулата

$$(35.4) \quad \sigma = \pi \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2.$$

Заместваме τ от уравнение (35.3) в (35.1) и за средната дължина на свободния пробег на молекулите получаваме

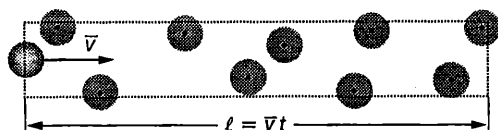
$$(35.5) \quad \lambda = \frac{1}{n_v \sigma}.$$

Точното пресмятане на средната дължина на свободния пробег на молекулите на идеалния газ λ е направено за пръв път от Максвел. Той отчита както движението на всички молекули, така и тяхното разпределение по скорости и получава формулата

$$(35.6) \quad \lambda = \frac{1}{n_v \sigma \sqrt{2}} = \frac{0,707}{n_v \sigma}.$$

Ще обърнем внимание, че точната формула (35.6) за средната дължина на свободния пробег λ се различава от получената с помощта на изложения по-горе груб модел формула (35.5) само с числен коефициент от порядъка на единица. Подобни елементарни модели ще използваме и по-нататък при разглеждането на преносните явления.

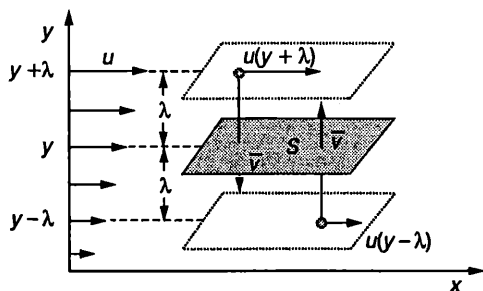
Фиг.35-1.



Вътрешно триене

В §26 беше разгледан законът на Нютон за силата на вътрешно триене между два слоя от вискозен флуид, които се хлъзгат един спрямо друг. С помощта на молекулно-кинетичната теория ще обясним причините за възникване на силите на вътрешно триене и ще определим от какво зависи вискозитетът η на идеалния газ. Да разгледаме ламинарен газов поток, насочен по оста x . Разделяме мислено газа на успоредни на оста x слоеве. Отделните слоеве се движат с различни скорости, като скоростта им u нараства по посока на оста y (фиг.35-2). Молекулите на газа извършват два вида движение: хаотично топлинно движение и насочено движение по оста x със скорост $u(y)$. При топлинното движение молекули от един слой непрекъснато преминават в друг слой и обратно. Ако слоевете не се движеха, или ако се движеха с еднакви скорости, поради хаотичния характер на топлинното движение средният импулс, пренесен при размяна на молекули между два слоя, щеше да е нула – топлинното движение не води до пренасяне на импулс от една макроскопична област на газа в друга такава област. Когато обаче два слоя, движещи се с различни скорости, обменят молекули, молекулите от по-бързия слой имат по-голяма скорост на насочено движение и след като преминат в по-бавния слой увеличават неговия импулс. Обратно, тяхното място в по-бързия слой се заема от идващи от по-бавния слой молекули с по-малка скорост на насочено движение u и импулсът на по-бързия слой намалява. Така става обмен на импулс между двата слоя. Съгласно с втория принцип

Фиг.35-2.



на механиката силата, която действа на всеки от слоевете, е равна на скоростта, с която се променя неговият импулс. По този начин два съседни слоя, движещи се с различни скорости, си взаимодействат със сили, наречени сили на вътрешно триене.

За да изследваме явлениято вътрешно триене количествено, ще използваме следния прост модел, предложен още от Джаул: Ще смятаме, че всички молекули извършват топлинно движение с еднаква по големина скорост, равна на средната аритметична скорост $\bar{v}$. Освен това опростено ще смятаме, че при топлинното движение молекулите са разделени на шест еднакви потока, успоредни на координатните оси. Например 1/6 от всички молекули се движи в положителната посока на оста u и 1/6 – в отрицателната посока на оста u ; 1/6 от молекулите се движи в положителната посока на оста x и т.н. Само молекулите, които се движат успоредно на оста y , преминават през площадката S , разделяща два слоя от газа (фиг.35-2). За време dt отдолу нагоре през площадката ще преминат 1/6 от всички молекули, които се намират в паралелепипеда с обем $S\bar{v}dt$, т.е.

$$(35.7) \quad N = \frac{1}{6} n_v S \bar{v} dt \text{ молекули,}$$

където n_v е концентрацията на молекулите на газа. Скоростта на насочено движение на всяка молекула е равна на скоростта u на слоя, в който молекулата за последен път се е ударила в друга молекула преди да пресече площадката S . За различните молекули последният удар е станал на различно разстояние от площадката S . В нашия модел обаче ще приемем, че за всички молекули последният удар е станал на едно и също разстояние от площадката, равно на средната дължина на свободния пробег λ на молекулите. Тогава всички молекули, пресичащи площадката отдолу нагоре, имат еднаква скорост на насочено движение $u(y - \lambda)$, на която съответства импулс $mu(y - \lambda)$. За време dt те пренасят през площадката импулс

$$(35.8) \quad p_1 = Nmu(y - \lambda) = \frac{1}{6} n_v S \bar{v} dt mu(y - \lambda).$$

Тъй като концентрацията на молекулите навсякъде е еднаква, за време dt същият брой N молекули пресича площадката в противоположната посока. Тези молекули обаче са претърпели последния си удар на разстояние λ над площадката, където скоростта на насочено движение е $u(y + \lambda)$. Пренесеният от тях импулс е

$$(35.9) \quad p_2 = Nmu(y + \lambda) = \frac{1}{6} n_V \bar{v} m u(y + \lambda) dt.$$

Изменението на импулса на газа под площадката е

$$(35.10) \quad dp = p_2 - p_1 = \frac{1}{6} n_V \bar{v} m [u(y + \lambda) - u(y - \lambda)] dt.$$

Тъй като средната дължина на свободния пробег е много малка в сравнение с разстоянието, на което градиентът на скоростта du/dy се изменя съществено, можем да запишем, че

$$u(y + \lambda) - u(y - \lambda) = 2\lambda \frac{du}{dy}.$$

Тогава уравнение (35.10) добива вида

$$(35.11) \quad dp = \frac{1}{3} n_V \bar{v} m \lambda \frac{du}{dy} dt.$$

Съгласно с втория принцип на механиката на газовия слой под площадката действа сила

$$(35.12) \quad F = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{3} n_V \bar{v} m \lambda \frac{du}{dy},$$

която е насочена по оста x , т.е. тя ускорява по-бавния слой. На слоя над площадката действа същата по големина сила, но нейната посока е противоположна на посоката на насочено движение на молекулите – бързият слой се забавя.

Сравняваме получения резултат със закона на Нютон за силата на вътрешно триене (вж. стр.141)

$$F = \eta S \frac{du}{dy}$$

и определяме вискозитета η на идеалния газ

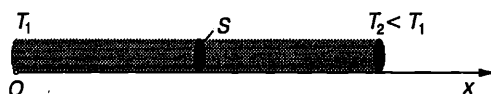
$$(35.13) \quad \eta = \frac{1}{3} n_V \bar{v} m \lambda.$$

Топлопроводност

Цилиндрична пръчка с напречно сечение S е нагрята неравномерно (фиг.35-3). Тъй като температурата се изменя по дължината на пръчката, в нея възникват макроскопични топлинни потоци, които пренасят количество топлина от по-топлия към по-студения край на пръчката. Опитно е установено, че количеството топлина, пренесено за единица време през напречното сечение S на пръчката, е пропорционално на температурния градиент dT/dx

$$(35.14) \quad Q = -\kappa S \frac{dT}{dx}.$$

Знакът минус показва, че топлината се пренася от по-топлия, към по-студения край на пръчката, т.е. в посоката, в която температурата T намалява. Коефициентът на пропорционалност κ (капа) характеризира веществото, от което е направена пръчката, и се нарича *коефициент на топлопроводност*. В табл.35.1 са дадени коефициентите на топлопроводност κ на някои вещества.



Фиг.35-3.

Таблица 35.1. Коефициент на топлопроводност κ на някои вещества при температура $T = 300$ K.

Вещество	κ , $\frac{W}{m \cdot K}$
Азот (газ)	0,0257
Водород (газ)	0,183
Въздух (газ)	0,026
Спирт	0,166
Вода	0,6
Олово	35
Никел	91
Мед	401

От табл.35.1. се вижда, че най-добри проводници на топлина са металите, докато газовете имат много малък коефициент на топлопроводност.

За да се определи коефициентът на

топлопроводност на идеалния газ, може да се използва същият модел, който беше подробно описан при разглеждането на явлениято вътрешно триене. За коефициента на топлопроводност на идеалния газ се получава

$$(35.15) \quad \kappa = \frac{1}{3} n_V \bar{v} m \lambda c_V,$$

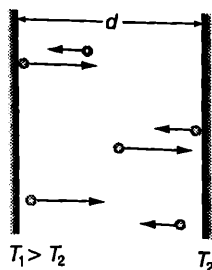
където c_V е специфичният топлинен капацитет при постоянен обем на газа. Заместваме средната дължина на свободния пробег λ от формула (35.6) в (35.15) и получаваме

$$(35.16) \quad \kappa \propto \frac{\bar{v} m}{\sigma} c_V.$$

Съотношението (35.16) показва, че топлопроводността на газовете не зависи от тяхната концентрация n_V . Същият извод се отнася и за коефициента на вътрешно триене. Този резултат на пръв поглед е неочакван, но има просто обяснение. Когато концентрацията (плътността) на газа е голяма, в пренасянето на енергия и на импулс участват голям брой молекули. Те обаче много често се удрят една в друга, затова всяка молекула пренася много малка порция енергия или импулс и то на малки разстояния (от порядъка на средната дължина на свободния пробег λ). При малка плътност всяка молекула пренася голяма порция енергия или импулс на голямо разстояние λ , което компенсира намаляването на броя на молекулите.

Не противоречи ли направеният извод на факта, че силно разредените газове са много добри топлоизолатори? Например въздухът между двойните стени на термосите се изпомпва, за да се подобри топлинната изолация. При атмосферно налягане средната дължина на свободния пробег на молекулите на въздуха λ , изчислена по формула (35.6), е много по-малка от разстоянието d между двете стени на термоса. Ако започнем да намаляваме налягането (изпомпваме въздуха между двойните стени на термоса), концентрацията на молекулите намалява и дължината на свободния им пробег нараства, но докато е в сила неравенството $\lambda \ll d$, коефициентът на топлопроводност остава постоянен. Когато обаче газът стане силно раз-

реден, много по-често се извършват удари на молекулите в стените на съда, отколкото между самите молекули (фиг.35-4). В този случай за дължина на свободния пробег може да се приеме разстоянието d между стените на съда: $\lambda = d$. При по-нататъшното разреждане на газа λ няма да се изменя (ударите между молекулите вече не играят почти никаква роля – молекулите се удрят само в стените на съда и пренасят енергия директно от стената с по-висока температура на стената с по-ниска температура). Тогава съгласно с формула (35.15) коефициентът на топлопроводност κ намалява право пропорционално на концентрацията n_V на газа.



Фиг.35-4.

Пример 35.1. Разстоянието между двойните стени на термос е $d = 4$ mm. Между тях се намира въздух при температура $T = 300$ K. Оценете при какво налягане топлопроводността на въздуха ще започне да намалява. Приемете, че ефективното сечение на молекулите на въздуха е $\sigma = 5.10^{-19}$ m².

Решение. Дължината на свободния пробег на молекулите се определя от формула (35.6):

$$\lambda = \frac{0.707}{n_V \sigma}.$$

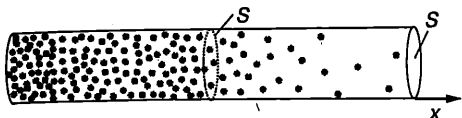
Изразяваме концентрацията n_V на молекулите на въздуха чрез налягането p и температурата T , $n_V = p/kT$ (вж. формула (32.12) на стр.177) и я заместваме във формулата за λ .

Получаваме: $\lambda = \frac{0.707 k T}{p \sigma}$. Ще приемем, че топлопроводността започва да намалява, когато $\lambda = d$. Тогава за налягането получаваме

$$p = \frac{k T}{d \sigma} = \frac{(1.38.10^{-23} \frac{J}{K})(300 K)}{(0.004 m)(5.10^{-19} m^2)} \approx 2 \text{ Pa}.$$

Дифузия

Ако в чаша с вода капнем мастило, в резултат на топлинното движение неговите молекули постепенно се смесват с моле-



Фиг.35-5.

кулите на водата и тя се оцветява. По същия начин ароматът от капка парфюм постепенно изпълва стаята. Явлението, при което в резултат на хаотичното топлинно движение молекулите на една течност (газ) се смесват с молекулите на друга течност (газ), се нарича *дифузия*. При дифузия молекулите винаги се движат от област, където тяхната концентрация е висока, към областите с по-ниска концентрация на дадения вид молекули.

Да разгледаме цилиндър, запълнен с два газа, които са разделени с преграда. Отляво на преградата е разположен газ 1, а отдясно – газ 2. Ако се премахне преградата, започва процес на дифузия и газовете се смесват. На *фиг.35-5* схематично е показано разпределението на молекулите на газ 1 в даден момент. Тяхната концентрация n_{v1} намалява по дължината на цилиндъра (по оста x) и става пренасяне на молекули на газа 1 отляво на дясно, докато се изравни концентрацията им в целия обем на цилиндъра. Аналогичен процес, само че в противоположната посока, протича и с другия газ. Опитно е установено, че масата dM_1 от газ 1, която преминава за време dt през напречното сечение S на цилиндъра, е пропорционална на градиента на концентрацията dn_{v1}/dx и се изразява с уравнението

$$(35.17) \quad dM_1 = -D_1 m_1 \frac{dn_{v1}}{dx} S dt,$$

където коефициентът на пропорционалност D_1 се нарича *коефициент на дифузия*. Аналогично уравнение може да се запише и за молекулите на втория газ, само че за тях коефициентът на дифузия D_2 ще има друга стойност. Зависимостта (35.17) е в сила и при дифузия на течности. Тя е била получена за пръв път експериментално през 1885 г. от немския физиолог Адолф Фик (1855–1901) и е наречена в негова чест *закон на Фик*.

Ако газовете от двете страни на пре-

градата са еднакви, също ще се извърши дифузия. Взаимната дифузия на два еднакви газа се нарича *самодифузия*. За да се наблюдава експериментално самодифузията, трябва молекулите на единия газ да се „бележат“ по някакъв начин. Например ядрата на „белязаните“ молекули могат да са радиоактивни. Самодифузията също се описва от закона на Фик. Тъй като белязаните и небелязаните молекули са еднакви, те ще се характеризират с един и същ коефициент на дифузия D .

За идеален газ с помощта на вече описания приближен модел за коефициента на дифузия D се получава

$$(35.18) \quad D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda.$$

Задачи

1. Ефективният диаметър на молекулите на кислорода е $d = 3 \cdot 10^{-10}$ m. При стайна температура ($T = 300$ K) и атмосферно налягане ($p = 1 \cdot 10^5$ Pa) тяхната средната аритметична скорост е 450 m/s. При тези условия определете:

а) средната дължина на свободния пробег на молекулите;

б) колко удара средно извършва една молекула с други молекули за една секунда;

в) колко пъти средната дължина на свободния пробег на молекулите е по-голяма от средното разстояние между молекулите. Молярната маса на кислорода е $M = 0,032$ kg/mol.

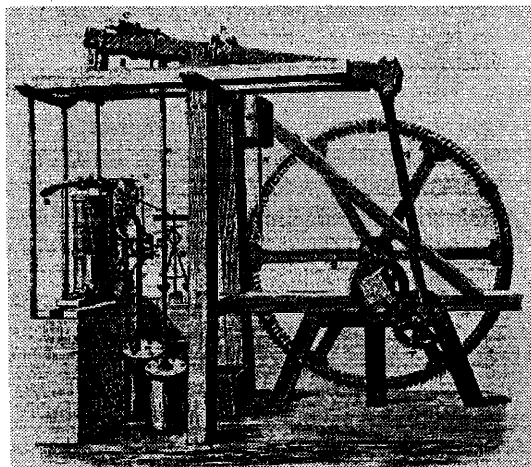
2. С дадено количество идеален газ се извършва процес, при който налягането на газа нараства 2 пъти. Колко пъти се изменя средната дължина на свободния пробег на молекулите на газа, ако процесът е: а) изотермен; б) изохорен?

3. При стайна температура и атмосферно налягане коефициентът на топлопроводност на хелия е 9 пъти по-голям от този на аргона. Определете отношението на ефективните диаметри на атомите на аргона и хелия d_{Ar}/d_{He} .

4. Двухатомен идеален газ, чиито молекули са с твърда връзка (не могат да трептят), се разширява адиабатно, при което обемът му нараства 2 пъти. Как и колко пъти се изменя вискозитетът η на газа?

5. Едноатомен идеален газ се свива адиабатно, при което обемът на газа намалява 4 пъти. Как и колко пъти се изменя коефициентът на дифузия D на газа?

Втори принцип на термодинамиката



Една от първите парни машини на Джеймс Уат.

Съгласно с първия принцип на термодинамиката в природата са възможни само такива процеси, при които енергията се запазва. Енергията на една термодинамична система може да се измени чрез извършване на работа или при топлообмен с околната среда. Работата и топлината са количествено еквивалентни, но между тях съществуват важни качествени различия. Те се изразяват в това, че работата може изцяло да се превръща в топлина (на пример при триене), докато обратното е невъзможно. Устройствата, които преобразуват топлината в работа, се наричат топлинни машини. Някоя топлинна машина обаче не може изцяло да превръща топлината в работа. Тази неравнопоставеност на двата начина за изменение на вътрешната енергия е свързана с едностранността на природните процеси. Вторият принцип на термодинамиката, на който ще се спрем в тази глава, позволява да се отговори на въпроса, кои от възможните процеси, непротиворечащи на закона за запазване на енергията, се реализират на практика и в каква посока протичат те. Откриването му се свързва с името на френския инженер и физик Сади Карно, който през 1824 г. публикува трактата „Размисли за движещата сила на огъня и за машините, способни да развиват тази сила“. През 60-те години на XIX век Клаузиус за пръв път въвежда величината ентропия, която заема централно място в съвременната термодинамика и статистическа физика. Често вторият принцип на термодинамиката се формулира като закон за изменението на ентропията. В тази глава ще отделим специално място и на екологичните проблеми, свързани с работата на топлинните машини.

36.Топлинни машини

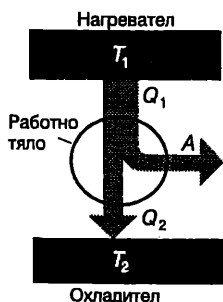
Коефициент на полезно действие

Топлинната машина е периодично действащо устройство, което преобразува получена от околната среда топлина в работа. Схематично (фиг.36-1) топлинната машина може да се представи като съставена от топлинен резервоар с висока температура T_1 (нагревател), работно тяло, извършващо кръгов процес, и втори топлинен резервоар с по-ниска температура T_2 (охладител). За един цикъл работното тяло получава количество топлина Q_1 от нагревателя, извършва полезна механична работа A и отдава количество топлина Q_2 на охладителя. За по-голяма нагледност при анализа на топлинните машини ще смятаме, че количеството топлина винаги има положителна стойност, а в енергетичния баланс влиза със знак плюс или минус в зависимост от това дали работното тяло приема или отдава топлина. Когато направи един пълен цикъл, работното тяло се връща в изходното си състояние, т.е. вътрешната му енергия достига началната си стойност. Тогава съгласно с първия принцип на термодинамиката механичната работа е

$$(36.1) \quad A = Q_1 - Q_2.$$

По определение коефициент на полезно действие (КПД) η на топлинна машина се нарича отношението на полезната механична работа A към полученото количество топлина Q_1

Фиг.36-1. Принципна схема на топлинна машина.



$$(36.2)$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Заместваме работата A от уравнение (36.1) в (36.2) и изразяваме КПД на топлинната машина чрез полученото от нагревателя количество топлина Q_1 и отдаденото на охладителя количество топлина Q_2

$$(36.3)$$

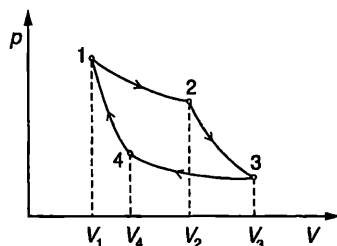
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Цикъл на Карно

Особено важно място в термодинамиката заема кръговият процес, съставен от два равновесни изотермни процеса и два равновесни адиабатни процеса. Топлинната машина, която използва този идеализиран цикъл, е била количествено анализирана за пръв път от Карно. Затова в негова чест цикълът е наречен цикъл на Карно, а самата машина – машина на Карно.

За да опростим анализа, ще разгледаме топлинна машина на Карно, чието работно тяло е цилиндър с бутало, който съдържа n mol идеален газ. Отначало цилиндърът се привежда в топлинен контакт с нагревателя и газът се разширява изотермно при температура T_1 от състояние 1 до състояние 2 (фиг.36-2). Всички процеси ще смятаме за равновесни. След това се прекъсва топлинният контакт с нагревателя и газът продължава да се разширява адиабатно, при което се охлажда. Адиабатният процес се прекратява, когато температурата на газа се изравни с температурата T_2 на охладителя (състояние 3 на pV -диаграмата). После цилиндърът се поставя в топлинен контакт с охладителя и следва процес на изотерм-

Фиг.36-2. Цикъл на Карно.



но свиване, докато се достигне състояние 4 (фиг.36-2), което лежи на една и съща адиабата с началното състояние 1. Накрая цилиндърът се маха от охладителя и чрез адиабатно свиване газът се връща в началното състояние 1.

Ще определим КПД на машината на Карно. При изотермното разширение газът получава от нагревателя количест-

во топлина $Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ (вж. пример 30.1

на стр.163), а при изотермното свиване отдава на охладителя количество топлина

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4},$$

където V_1, V_2, V_3 и V_4 са обемите на газа съответно в състояние 1, 2, 3 и 4. При адиабатните процеси газът не обменя топлина с околната среда. Съгласно с формула (36.3) коефициентът на полезно действие е

$$(36.4) \quad \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Записваме уравнението на Поасон за двата равновесни адиабатни процеса (вж. пример 31.4 на стр.172):

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \text{ и } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

Делим почленно левите и десните страни на двете уравнения и получаваме

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} \text{ или } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тъй като отношенията на обемите са равни, логаритмите на тези отношения също са равни и формула (36.4) добива вида

$$(36.5) \quad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Теорема на Карно

Доказва се, че полученият резултат (36.5) за КПД на машината на Карно остава в сила и в случаите, когато работното тяло не е

идеален газ. Първата теорема на Карно гласи:

КПД на топлинна машина, работеща по цикъла на Карно, не зависи от вида на работното вещество. Той се определя единствено от температурите на нагревателя и на охладителя и се изразява с формула (36.5).

Възможно ли е да се конструира топлинна машина, която да работи при същите температури на нагревателя и охладителя, както машината на Карно, но да има по-голям КПД? Отговор на този въпрос дава втората теорема на Карно:

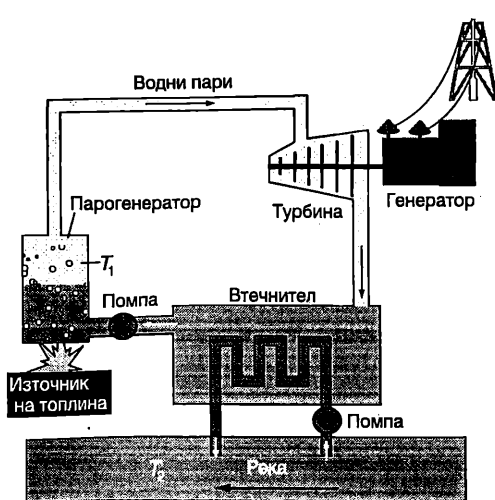
Сред всички възможни топлинни машини, които работят при дадени температури на нагревателя и охладителя, най-голям коефициент на полезно действие има машината на Карно.

Теоремите на Карно са една от възможните (еквивалентни) формулировки на втория принцип на термодинамиката, на които ще се спрем по-нататък.

Цикълът на Карно е идеализиран – никоя реална топлинна машина не работи по този цикъл. Неговото принципно значение се определя от това, че той задава горната граница на коефициента на полезно действие на топлинните машини. Ако са фиксирани температурите на нагревателя и на охладителя, никакви конструкционни и технологични подобрения не могат да повишат КПД на една реална топлинна машина над теоретичната граница, определена от формула (36.5).

Топлинно замърсяване на околната среда

На фиг.36-3 схематично са показани основните елементи на електроцентраля, работеща с водни пари. Източникът на топлина може да е различен: въглища, газ или ядрен реактор. В парния котел водните пари се нагряват до температура $T_1 \approx 650$ К. След като завърти турбината, отработената пара попада във втечителя, където се охлажда и втечнява от циркулиращата в него вода с температура $T_2 \approx 300$ К. Съгласно с теоремата на Карно максималният теоретично



Фиг.36-3.

възможен КПД на електроцентрала е

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{650 \text{ K}} = 0,54.$$

Поради неизбежните топлинни загуби, в действителност КПД не надхвърля 40%. За електроцентралите с ядрено гориво той е още по-малък, тъй като за да се осигури максимална безопасност на ядрената електроцентрала, използва се пара с по-ниска температура. Следователно по-малко от 40% от отделената при изгарянето на горивото топлина се преобразува в електроенергия. Останалите над 60% се отделят в околната среда и предизвикват топлинно замърсяване. Например на схемата от фиг.36-3 тази топлина се отдава на водата от реката, която се използва за охлаждане, и температурата ѝ се повишава.

В развитите страни производството на електроенергия е достигнало етап, когато почти са изчерпани възможностите природните водоеми да бъдат използвани за охлаждане. Топлинното замърсяване на околната среда не е изключено да доведе до екологична катастрофа, ако не се вземат необходимите мерки. Например покачването на температурата на водата води до намаляване на концентрацията на разтворения в нея кислород, което заплашва фауната и флората в природните водоеми. В редица страни са приети норми за пределно допустимото повишаване

температурата на водоемите, използвани за охлаждане. Например в САЩ се допуска повишаване на температурата най-много с 2,3 °C през пролетта, есента и зимата и с 0,8 °C през лятото.

Когато електроцентрала е близо до населено място и климатът е студен, проблемът частично се решава, като се използва отделената топлина в системата за парно (водно) отопление на градовете. Особено остро стои въпросът с топлинното замърсяване в икономически развитите и гъсто населени райони с топъл климат. Там през лятото има повишено потребление на електроенергия, тъй като работят хиляди кондиционери за охлаждане на въздуха в жилищните сгради, а отделената в електроцентралите излишна топлина не може да се използва за отопление, тъй като такова не е необходимо. В някои от тези райони са създадени изкуствени езера, в които излишната топлина се използва за изпарение на водата. Екологичните последиците обаче от подобно допълнително увеличаване съдържанието на водни пари във въздуха са трудно предсказуеми и също бъдат безпокойство.

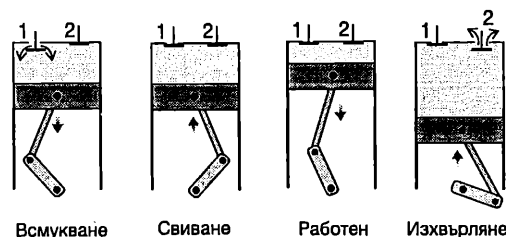
Цикъл на Ото

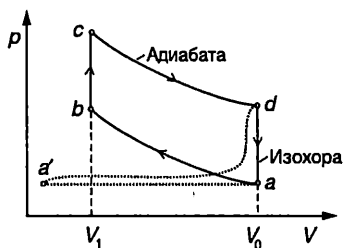
През 1876 г. немският инженер Николаус Ото (1832–1891) създава първия образец на четиритактов двигател. Четирите такта на буталото на двигателя, работещ по цикъла на Ото, са показани схематично на фиг.36-4:

1 такт (всмукване на горивната смес).

Буталото се изтегля и през отворения входен клапан 1 работният обем V_0 на цилиндъра се запълва със смес от въздух и гориво (бензин). В края на първия такт състоянието на горивната смес (работното тяло на топлинната машина) се изразява с точка а

Фиг.36-4. Четиритактов двигател.





Фиг.36-5. Цикъл на Ото.

на pV -диаграмата от фиг.36-5.

2 такт (свиване). Затваря се входният клапан 1 и буталото се движи нагоре. Тъй като свиването на горивната смес става бързо, топлообменът се пренебрегва и процесът с приближение може да се разглежда като равновесен адиабатен процес на свиване, при който нараства вътрешната енергия и температурата на сместа. На pV -диаграмата процесът се представя с адиабатата ab .

3 такт (работен). Чрез искра се възпламенява горивната смес. Протичат химични реакции на горене, при които се отделя топлина и газовата смес се нагрява до висока температура. Ще обърнем внимание, че в случая няма външен източник на топлина – топлинен резервоар (нагревател), от който работното вещество на топлинната машина да получава чрез топлообмен количество топлина Q_1 . Нагревателят е заменен с вътрешен източник на топлина: при възпламеняване на горивната смес се отделя количество топлина Q_1 . Затова този вид топлинни машини (двигатели) се наричат *двигатели с вътрешно горене*. Процесът на горене се извършва толкова бързо, че поради своята инертност буталото практически не се премества. Затова сложните неравновесни процеси, които протичат по време на горенето, могат да се заменят с равновесен изохорен процес на нагряване bc . След това започва работният такт – сместта от горещ въздух и продукти на горенето действа с голяма сила на натиск върху буталото. То се спуска надолу, извършва механична работа и завърта колянвия вал. Процесът на бързо разширение на газовата смес се апроксимира с адиабатата cd от фиг.36-5.

4 такт (изхвърляне на отработените

газове). Отваря се изходният клапан 2 (фиг.36-4) и буталото изхвърля навън изгорелите газове. На pV -диаграмата този процес схематично е показан с пунктираната линия da' . В случая околната среда играе ролята на топлинен резервоар (охладител), който заедно с отработените газове приема и тази част (Q_2) от отделената при горенето топлина, която не е преобразувана в механична работа. След това се засмуква свежа горивна смес (пунктираната линия $a'a$) и процесите се повтарят. При анализа на работния цикъл на двигателя сложните неравновесни процеси на всмукване на горивна смес и изхвърляне на отработените газове могат да се заменят с равновесен изохорен процес на охлаждане da . Така за описване на реалните процеси в двигателя се използва опростен модел – дадено количество идеален газ извършва равновесен кръгов процес, съставен от две изохори и две адиабати, наречен *цикъл на Ото*. Лесно се пресмята, че КПД на топлинна машина, работеща по цикъла на Ото, е (вж. пример 36.1)

$$(36.6) \quad \eta = 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\gamma-1},$$

където γ е коефициентът на Поасон за газа, а $\varepsilon = V_0/V_1$ е отношението на обемите на газа, когато буталото се намира в долното крайно положение (V_0) и в горното крайно положение (V_1). Числото ε се нарича *степен на свиване* и определя КПД на двигателите, работещи по цикъла на Ото.

Пример 36.1. Да се определи коефициентът на полезно действие на двигател, работещ по цикъла на Ото (фиг.36-5).

Решение. Полученото от n mol идеален газ количество топлина Q_1 при изохорния процес на нагряване bc е равно на изменението на вътрешната енергия на газа:

$$Q_1 = \Delta U = nC_V(T_c - T_b),$$

където T_c и T_b са температурите на газа съответно в състояние c и b , C_V е изохорният моларен топлинен капацитет на газа. По аналогичен начин определяме отделеното от газа количество топлина Q_2 при изохорния процес на охлаждане da :

$$Q_2 = |\Delta U| = nC_V(T_d - T_a).$$

При адиабатните процеси не се извършва топлообмен. КПД е

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}.$$

Записваме уравнението на Поасон за двата адиабатни процеса

$$T_a V_0^{\gamma-1} = T_b V_1^{\gamma-1} \text{ и } T_c V_1^{\gamma-1} = T_d V_0^{\gamma-1}$$

или

$$T_a = T_b \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{\gamma-1} \text{ и } T_d = T_c \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{\gamma-1}$$

Заместваме температурите T_a и T_d във формулата за η и след като съкратим $(T_c - T_b)$, получаваме

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\gamma-1}$$

Октанови числа

От формула (36.6) се вижда, че за да се осигури висок КПД на цикъла на Ото, трябва да се достигне колкото е възможно голяма степен на свиване ϵ на горивната смес. При голяма степен на адиабатно свиване ϵ обаче рязко нарастват температурата и налягането на сместа, което води до предварително окисляване на горивото и до създаване на продукти, които горят значително по-бързо от изходния бензин. Процесът на възпламеняване на такава предварително окислена горивна смес се извършва по-бързо и добива взривен характер. Това явление се нарича *детонация*. Детонацията е съпроводена от ударна вълна, която може да доведе до механични повреди на двигателя. Появява се свистене и чукане в двигателя и пада мощността. Двигателят работи нормално само когато няма детонация, т.е. детонацията ограничава възможността да се постигнат големи стойности на ϵ . При каква стойност на ϵ ще се появи детонация зависи от химичния състав на бензина. Бензините съдържат смес от различни въглеводороди. Когато атомите на въглерода образуват линейни вериги (например при хептана), детонация се появява при срав-

нително ниска степен на свиване ϵ . Разклонените въглеводороди (например изооктана) са значително по устойчиви към детонация. Устойчивостта на даден вид бензин към детонация се характеризира с неговото *октаново число*. Октановото число е равно на процентното съдържание на изооктана в смес от хептан и изооктан, в която детонация настъпва при същата степен на свиване ϵ , както в дадения бензин. Например за бензин с октаново число 91 детонация настъпва при същата стойност на ϵ , както в смес от 91% изооктан и 9% хептан. При разтваряне на няколко кубически сантиметра тетраетилолово в един литър бензин значително се увеличава неговото октаново число. За получаване на безоловни бензини с високи октанови числа се използват специални технологии, които позволяват да се увеличи съдържанието на разклонените въглеводороди в бензина.

Замърсяване на околната среда

Автомобилните двигатели годишно изхвърлят в атмосферата милиони килограми оловни съединения, които попадат и в човешкия организъм чрез въздуха, който дишаме, водата и храната, които приемаме. Отровното действие на солите на оловото е отдавна известно. Изследванията също така показват, че продължителното действие върху човешкия организъм дори на малки концентрации от тези вещества също е опасно. Друга опасност за човека и околната среда представляват неизгорелите въглеводороди, които се съдържат в отработените газове. Под действие на слънчевите лъчи и атмосферния кислород те се окисляват и възникват вредни продукти, предизвикващи сълзене, дразнене на дихателните пътища и др. За да се подобри изгарянето, горивната смес се обогатява допълнително с кислород. Високата температура в двигателите с голяма степен на сгъстяване, съчетана с наличието на големи количества кислород, води до нежелателен страничен ефект – окисляване на азота в горивната смес и образуване на азотен оксид (NO). След изхвърлянето му в атмосферата, NO се окислява до NO₂. Азотният диоксид е отровен газ, който придава на смога кафяв оттенък.

За почистване на отработените газове от неизгорелите въглеводороди в съвременните автомобили се използват специални катализатори. Автомобилите с катализатори използват безоловни бензини. С безоловния бензин се постига двоен ефект: в атмосферата не се изхвърля олово и се удължава животът на катализатора. В много страни се провежда системен контрол на съдържанието на частично окислени въглеводороди, оксиди на въглерода, азота и сярата и на отровни съединения на оловото в изхвърлените от двигателя газове. Автомобилите, които не отговарят на установените норми, се спират от движение.

Задачи

1. Един от проектите за търсене на екологично чисти източници на енергия предвижда използването на разликата в температурите на водата на повърхността на океана и на дълбочина около 1 km. Топлата вода от повърхността служи за нагревател, който изпарява работното вещество – амониак или друга, лесно изпаряваща се течност. След това получените пари задвижват турбината на електроцентралата и кондензират, като отдават количество топлина на студените водни слоеве. Колко е максималният възможен КПД на такава топлинна машина, ако тя се построи около Хавайските острови? Температурата на повърхността на Тихия океан там е около 27 °C, а на дълбоките слоеве е 7 °C.

2. Парогенераторът на електроцентралата, която използва слънчева енергия, е разположен в кула, заобиколена от 1800 огледала с обща площ $5 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. Огледалата отразяват слънчевите лъчи и ги насочват към кулата, където те се поглъщат и нагреват водните пари в парогенератора. Каква електрична мощност има слънчевата електроцентралата, ако слънчевата енергия, която пада за 1 s върху 1 m^2 от земната повърхност, е 200 W/m^2 . КПД е 10%, т.е. 10% от слънчевата енергия се преобразува в електрична.

3. Атомна електроцентралата произвежда електрична мощност $P = 1000 \text{ MW}$ при КПД 34 %. За охлаждане се използва водата на река, като всяка секунда през втечнителя (фиг.36-3) преминават $m = 6 \cdot 10^4 \text{ kg}$ вода. С колко градуса се повишава температурата на охлаждащата вода? Специфичният топлинен капацитет на водата е $c = 4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

4. Слънчевата енергия може да се използва

за нагряване на водата в изкуствени солени езера. В езерото се разтваря голямо количество готварска сол. Концентрацията на солта нараства с дълбочината и в близост до дъното се разполагат най-плътните и тежки солени слоеве. Слънчевата светлина почти безпрепятствено преминава през прозрачната водна повърхност и се поглъща от непрозрачните солени слоеве на дъното, като ги нагрява. Така се създава температурна разлика между дъното и повърхността на езерото, която може да се използва за привеждане в действие на топлинна машина.

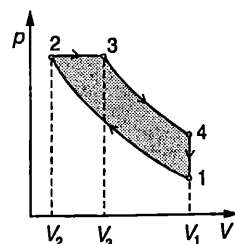
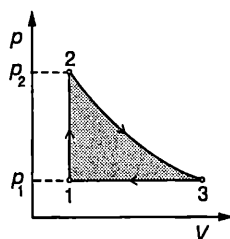
При каква повърхност на езерото идеална топлинна машина ще има мощност 1 MW, ако получава топлина от солена вода с температура 127 °C и за охладител използва водата от повърхността на езерото с температура 27 °C? Мощността на слънчевата радиация е 200 W/m^2 .

*5. Определете КПД η на топлинна машина, работеща по цикъла на Ленуар (фиг.36-6), съставен от изохорния процес 1–2, адиабатния процес 2–3 и изобарния процес 3–1. Представете η като функция на степента на повишаване на налягането $\alpha = p_2/p_1$. Работното тяло е идеален газ с коефициент на Поасон γ .

*6. Определете КПД η на двигател с вътрешно горене, работещ по цикъла на Дизел. Опростен (идеализиран) вариант на този цикъл е показан на фиг.36-7. Отначало атмосферният въздух се свива адиабатно (процес 1–2 на pV -диаграмата). При достигане точката на максимално свиване 2 се въпръсква горивото, а изгарянето на горивната смес се извършва по време на разширението 2–3, което в опростения модел се разглежда като изобарен процес. Останалите два процеса са същите, както при цикъла на Ото: адиабатно разширение 3–4 и изохорно охлаждане 4–1. Представете η като функция на степента на свиване $\epsilon = V_1/V_2$ и на степента на предварително разширение $\beta = V_3/V_2$. Приемете, че всички процеси са равновесни и се извършват с идеален газ с коефициент на Поасон γ .

Фиг.36-6.

Фиг.36-7.



37. Ентропия

Приведена топлина

От уравнения (36.3) и (36.5) за КПД на цикъла на Карно записваме:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Следователно

$$(37.1) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

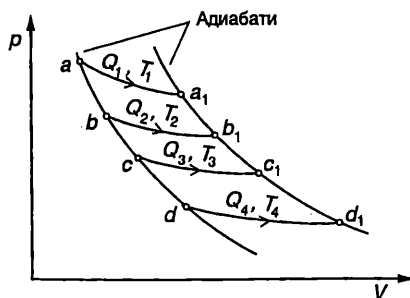
При анализа на цикъла на Карно за по-голяма нагледност разгледахме обменените за един цикъл количества топлина Q_1 и Q_2 като величини, които имат само положителни стойности. При прилагането на първия принцип на термодинамиката за дадена термодинамична система обаче количеството топлина се разглежда като алгебрична величина, която има положителна стойност ($Q > 0$), когато системата приема топлина от околната среда, и отрицателна стойност ($Q < 0$), когато системата отдава топлина на околната среда. По-нататък ще разглеждаме количеството топлина като алгебрична величина, която може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Тогава равенство (37.1) се записва във вида

$$(37.2) \quad \frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

където $Q_1 > 0$, а $Q_2 < 0$.

Отношението Q/T на полученото (или отдаденото) количество топлина Q при изотермен процес към температурата T , при която протича процесът, се нарича *приведено количество топлина*. Формула (37.2) показва, че сумата от приведените количества топлина за цикъла на Карно е равна на нула.

Двете изотерми в цикъла на Карно можем да разглеждаме като два от възможните изотермни преходи между състояния на термодинамичната система, които лежат на две различни адиабати. На *фиг.37-1* са показани няколко от възможните изотермни прехода от едната адиа-



Фиг.37-1.

бата на другата. Всеки от тези преходи се извършва при различна температура и при него системата обменя различно количество топлина. Ще докажем обаче, че приведените топлини, характеризиращи всички изотермни процеси, свързващи двете адиабати, са еднакви. Действително, от всяка двойка от изотермите и от двете адиабати може да се състави цикъл на Карно. Да разгледаме например цикъла $a-a_1-c_1-c-a$ (*фиг.37-1*). При изотермното разширение $a-a_1$ системата получава количество топлина Q_1 при температура T_1 . При изотермното свиване c_1-c тя отдава на околната среда количество топлина $-Q_3$ при температура T_3 ($Q_3 > 0$ е количеството топлина, което системата получава при изотермното разширение $c-c_1$). Съгласно с уравнение (37.2)

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{-Q_3}{T_3} \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_3}{T_3}.$$

Тъй като двете изотерми бяха взети произволно, следва изводът, че приведените количества топлина Q/T при всички изотермни преходи от една адиабата на друга адиабата са равни.

Нека сега разгледаме два произволни равновесни процеса A и B , чрез които една термодинамична система преминава от някакво равновесно състояние a в друго равновесно състояние b (*фиг.37-2*). Ще докажем, че сумите от приведените топлини за двата процеса са еднакви.

На pV -диаграмата пресичаме графиките на двата процеса с гъста мрежа от адиабати, крайните две от които преминават през точките a и b (*фиг.37-2*). Замениме процесите A и B с редуващи се изо-

термни и адиабатни процеси, които се представят с начупените линии от *фиг.37-2*. Приведените топлини при изотермните преходи между две съседни адиабати са равни:

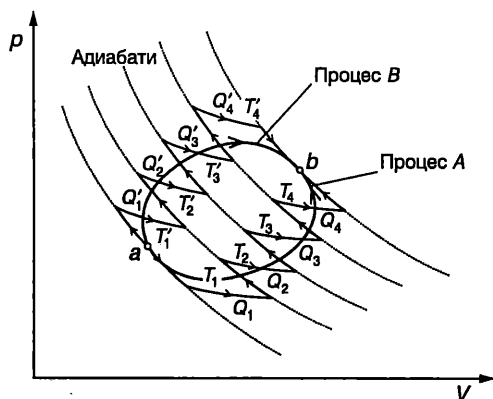
$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q'_1}{T'_1}; \quad \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q'_2}{T'_2} \text{ и т.н.}$$

Тъй като при адиабатните процеси не се извършва топлообмен, сумата от приведените топлини за двете последователности от изотермни и адиабатни процеси, с които сме заменили процесите А и В, са равни:

$$(37.3) \quad \sum \frac{Q_i}{T_i} = \sum \frac{Q'_i}{T'_i}.$$

На *фиг.37-2* броят на адиабатите е само пет. Затова последователността от изотермни и адиабатни процеси твърде грубо апроксимира дадените процеси А и В. Ако обаче увеличаваме броя на адиабатите и изотермите, начупената линия ще се доближава все по-близо до кривите, представящи двата процеса, и в граничния случай на безкраен брой стъпки ще се слее с тези криви. Следователно всеки равновесен термодинамичен процес може да се представи като последователност от редуващи се елементарни адиабатни и изотермни процеси и да се характеризира със сумата от приведените топлини $\delta Q/T$ при елементарните изотермни процеси. Тогава равенството (37.3) се записва във вида

Фиг.37-2.



$$(37.4) \quad \int_a^b \frac{\delta Q}{T} = \int_a^b \frac{\delta Q'}{T'} \\ \text{за процес А} \qquad \qquad \text{за процес В}$$

Уравнение (37.4) показва, че сумата от приведените топлини не зависи от вида на процеса, а единствено от началното и от крайното състояние на системата.

Ентропията като функция на състоянието

От механиката знаем, че работата на консервативна сила F не зависи от пътя, а единствено от началното състояние a и от крайното състояние b на механичната система от материални точки. Този факт дава възможност състоянието на механичната система да се характеризира с една функция от координатите на материалните точки, наречена потенциална енергия W . По определение изменението на потенциалната енергия е равно на взетата с обратен знак работа на консервативните сили

$$W_b - W_a = - \int_a^b F \cdot dr.$$

По подобен начин германският физик Рудолф Клаузиус (1822–1888), като използва получения от него резултат, че сумата от приведените топлини не зависи от вида на равновесния процес, а се определя единствено от началното и от крайното състояние на термодинамичната система, въвежда една нова функция на състоянието, която нарича ентропия. По определение

изменението на ентропията на равновесна термодинамична система при преминаване от дадено състояние a в друго състояние b е равно на сумата от приведените топлини, които системата обменя с околната среда при извършването на този преход чрез произволен равновесен процес:

$$(37.5) \quad \Delta S = S_b - S_a = \int_a^b \frac{\delta Q}{T}.$$

Диференциалът на функцията S съгласно с уравнение (37.5) е

(37.6)

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

За равновесен адиабатен процес $\delta Q = 0$ и съгласно с уравнение (37.6) $dS = 0$, т.е. $S = \text{const}$. Следователно равновесните адиабатни процеси са *изоентропийни* процеси – при тях ентропията на термодинамичната система не се изменя.

Теорема на Нернст

Германският физикохимик Валтер Нернст (1864–1941) обобщава експерименталните изследвания на различни вещества при ниски температури и през 1906 г. формулира следната теорема:

При приближаване на равновесна термодинамична система към абсолютната нула (0 K), нейната ентропия престава да зависи от термодинамичните параметри на системата и клони към еднаква за всички термодинамични системи стойност, която може да се приеме за равна на нула ($S = 0$ при $T = 0$ K).

От теоремата на Нернст непосредствено следва, че никое тяло не може да бъде охладено до абсолютната нула. Действително, всеки равновесен процес на охлаждане може да се представи като последователност от елементарни процеси на адиабатно разширение и изотермно свиване. При адиабатното разширение температурата се понижава, а при изотермното свиване от тялото се отнема количество топлина δQ и ентропията му намалява с $dS = \delta Q/T < 0$ ($\delta Q < 0$). Тъй като съгласно с теоремата на Нернст, когато абсолютната температура клони към нула ($T \rightarrow 0$), ентропията престава да се изменя ($dS = 0$), то при изотермното свиване от тялото престава да се отнема количество топлина ($\delta Q = 0$). Казано по друг начин, при $T \rightarrow 0$ изчезва разликата между изотермните и адиабатните процеси. При наближаване на абсолютната нула работата, която извършва тялото при адиабатното си разширение, започва да клони към работата на външните сили при следващото го изотермно свиване и вътрешната енергия и температурата на тя-

лото започват все по бавно да намаляват. Затова чрез подобна последователност от адиабатни и изотермни процеси е възможно тялото само асимптотично да се приближава към абсолютната нула, без да я достига.

Често теоремата на Нернст се формулира като трети принцип на термодинамиката или като *принцип за недостижимостта на абсолютната нула*.

Основно уравнение на термодинамиката

Записваме уравнението на първия принцип на термодинамиката (вж. уравнение (30.9) на стр.165) $\delta Q = dU + pdV$ във вида

$$\delta Q = nC_V dT + pdV,$$

където $dU = nC_V dT$ (вж. стр.169) е изменението на вътрешната енергия. Изразяваме елементарното количество топлина δQ чрез диференциала dS на ентропията от уравнение (37.6): $\delta Q = TdS$. Получаваме (37.7) $TdS = nC_V dT + pdV$.

Уравнение (37.7) се нарича *основно уравнение на термодинамиката* за проста система с един външен параметър. То обединява уравнението (30.9) на първия принцип на термодинамиката и уравнението (37.6), чрез което се дефинира величината ентропия.

Пример 37.1. n mol идеален газ се намира в равновесното състояние *a*, в което заема обем V_a при температура T_a . Газът извършва равновесен процес и преминава в състояние *b*, в което има обем V_b и температура T_b . Определете изменението на ентропията на газа при този процес. Изохорният моларен топлинен капацитет на газа е C_V .

Решение. Изменението на ентропията не зависи от вида на процеса, а се определя единствено от началното и от крайното състояние на идеалния газ. От уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = nRT$ изразяваме налягането $p = nRT/V$ и го заместваем в основното уравнение на термодинамиката (37.7). За диференциала на ентропията получаваме

$$dS = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}.$$

Изменението на ентропията на газа при преминаването от състояние *a* в състояние *b*

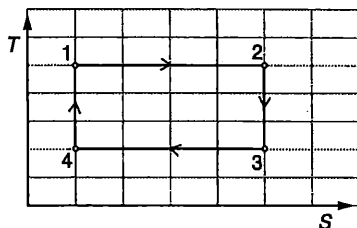
чрез равновесен процес е

$$\Delta S = \int_a^b dS = nC_V \int_{T_a}^{T_b} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} =$$

$$= nC_V \ln \frac{T_b}{T_a} + nR \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

Задачи

1. При равновесен изотермен процес термодинамична система получава от околната среда 4 kJ количество топлина и ентропията на системата нараства с 20 J/K. При каква температура е протекъл процесът?
2. Идеален газ се разширява изотермно при температура 300 K. Колко е изменението на ентропията на газа, ако при разширението газът е извършил 3 kJ работа?



Фиг.37-3.

3. При представянето на термодинамичния цикъл от фиг.37-3 е използвана TS -диаграма (по абсцисната ос е нанесена ентропията S , а по ординатната ос – абсолютната температура T). Опишете всеки от четирите процеса, включени в цикъла. Представете същия цикъл на pV -диаграма. Как се нарича този цикъл?

4. n mol идеален газ се разширява изотермно, при което обемът на газа нараства 2 пъти. Определете изменението на ентропията на газа.

5. Два мола едноатомен идеален газ се нагряват при постоянен обем от температура 200 K до температура 400 K. Пресметнете изменението на ентропията на газа.

6. Пресметнете изменението на ентропията на 1 mol хелий (едноатомен газ), който се охлажда при атмосферно налягане (1.10^5 Pa) от стайна температура (300 K) до температура 10 K.

7. В цилиндър с бутало се намират $n = 2$ mol хелий. Отначало газът се разширява адиабатно и обемът му нараства 2 пъти, а след това се свива изобарно, докато достигне първоначалния си обем. Определете изменението на ентропията при този процес.

8. Пресметнете изменението на ентропията на 3 mol идеален газ с коефициент на Поасон $\gamma = 1,4$ при равновесен процес, в резултат на който налягането на газа е нараснало 2 пъти, а обемът е намалял 4 пъти.

9. В цилиндър с бутало се намират 2 mol аргон (едноатомен идеален газ). Газът извършва равновесен процес на разширение, при който налягането на газа нараства пропорционално на неговия обем ($p = aV$, където $a > 0$ е константа). Определете изменението на ентропията на газа, когато обемът му нарасне 2 пъти.

38. Ентропия и вероятност

Микросъстояния и макросъстояния

Моментното състояние на една механична система се задава най-пълно, ако са известни положенията и скоростите на всички частици от системата в дадения момент от времето. Такъв динамичен подход обаче не е приложим за макроскопичните системи, поради огромния брой на атомите и на молекулите в тях. Тяхното състояние не може да се описва толкова детайлно. Да разгледаме например идеален газ, съставен от N еднакви молекули, който се намира в съд с обем V . Вместо да се задават координатите на отделните молекули в даден момент от времето, може да се използва следният по-груб метод за описване на пространственото разположение на молекулите. Обемът V мислено се разделя на m еднакви части (клетки) и се номерират всички молекули. Тогава състоянието на газа може да се характеризира с броя и номерата на молекулите, намиращи се в даден момент във всяка една от клетките. Подобен подход, който тук няма да разглеждаме, се използва и за характеризиране на скоростите (кинетичната енергия) на молекулите. Определеното по този начин състояние на газа (на макроскопичната система) се нарича микросъстояние. Тъй като молекулите са еднакви, от макроскопична гледна точка няма значение кои точно молекули се намират в дадена пространствена клетка. Затова ще смятаме, че макроскопичното състояние на газа е напълно определено, ако е известен броят на молекулите във всяка клетка.

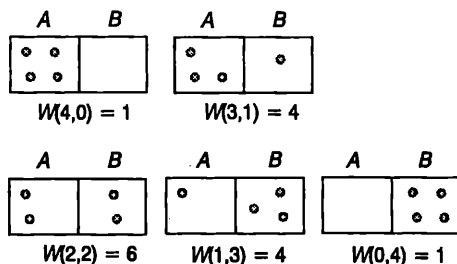
Термодинамична вероятност

В статистическата физика се доказва, че всички достъпни микросъстояния на една изолирана система са равновероятни, т.е. вероятността системата да се намира в кое да е от тези състояния е еднаква. Всяко макросъстояние се реализира чрез определен брой микросъстояния. Броят на микросъстоянията, съответстващи на да-

дено макросъстояние, се нарича *термодинамична вероятност* W на това макросъстояние. Тъй като всички микросъстояния са равновероятни, с течение на времето системата хаотично ще преминава от едно микросъстояние в друго микросъстояние. От всички възможни макросъстояния обаче тя ще се намира по-дълго време в тези, на които съответстват по-голям брой микросъстояния, т.е. в макросъстоянията с най-голяма термодинамична вероятност.

Ще поясним изложеното дотук с един прост пример. Разглеждаме система, съставена само от $N = 4$ частици. Разделяме мислено достъпния за движение на частиците обем на $m = 2$ равни части (клетки). Макросъстоянието на системата ще характеризираме с броя на частиците във всяка клетка. Възможни са 5 различни макросъстояния (фиг.38-1). Макросъстоянията $(4,0)$ и $(0,4)$, при които всички частици се намират съответно в клетка A или в клетка B се реализират само чрез едно единствено микросъстояние. Затова тяхната термодинамична вероятност е единица: $W(4,0) = W(0,4) = 1$. На макросъстоянието, при което три частици се намират в клетка A , а една частица – в клетка B , съответстват 4 различни микросъстояния: в клетка B може да се намира частицата с номер 1, 2, 3 или 4. Затова термодинамичната вероятност в този случай е $W(3,1) = W(1,3) = 4$. Макросъстоянието $(2,2)$ – две частици в клетка A и две частици в клетка B , се реализира по 6 различни начина: в клетка B могат да се намират частиците с номера 1 и 2; 1 и 3; 1 и 4; 2 и 3; 2 и 4; или 3 и 4. Термодинамичната вероятност е $W(2,2) = 6$.

Фиг.38-1.



В случая броят на всички възможни микросъстояния е 16. Тъй като те са равновероятни, математическата вероятност в даден момент да се реализира кое да е от тях е $p = 1/16$. Математическата вероятност за макросъстоянията (4,0) или (0,4) също е $1/16$, докато вероятността за състоянието (2,2) е $6/16$. Тя е 6 пъти по-голяма, защото на това макросъстояние съответстват 6 различни микросъстояния. Например, ако през равни интервали от време правим снимки на системата, на всеки 16 кадъра средно на 1 кадър системата ще е запечатана в състояние (4,0), а на 6 кадъра – в състояние (2,2).

Ако в двете клетки могат да се разполагат N частици, тогава броят на микросъстоянията е 2^N , а математическата веро-

ятност за всяко от тях е $p = \frac{1}{2^N}$. Например за $N = 10$ математическата вероят-

ност за всяко микросъстояние е $p = \frac{1}{1024}$, т.е. средно на всеки 1024 снимки ще се намери само една, на която всички частици са например в клетка А. За $N = 100$ вече ще са необходими повече от 10^{30} снимки, за да открием поне на една от тях всички частици събрани в клетка А, т.е. вероятността за това събитие е пренебрежимо малка. Ако в съда се намира 1 mol газ ($N = 6.10^{23}$ молекули), с пълна увереност можем да твърдим, че никога всички молекули няма сами да се съберат в едната половина на съда.

За системите, изградени от много голям брой частици, съществува макросъстояние, чиято термодинамична вероятност W е толкова голяма, в сравнение с всички останали макросъстояния, че на практика се реализира единствено то. Това е състоянието на термодинамично равновесие. Само външно въздействие

може да изведе макросистемата от състоянието на термодинамично равновесие и да я приведе в друго състояние с по-малка термодинамична вероятност. Оставена сама на себе си, системата последователно преминава чрез процеса на релаксация през макросъстояния с нарастваща термодинамична вероятност, докато достигне състоянието с максимална термодинамична вероятност – равновесното състояние.

Уравнение на Болцман

През 1872 г. Л. Болцман доказва, че ентропията S и термодинамичната вероятност W са свързани със съотношението

$$(38.1) \quad S = k \ln W.$$

където $k = 1,38.10^{-23}$ J/K е константата на Болцман. В негова чест уравнение (38.1) е наречено уравнение на Болцман.

Ентропията – мярка за молекулният хаос

От направените дотук разглеждания става ясно, че колкото по-подредено е състоянието на една макросистема, толкова по-малка е термодинамичната вероятност на това състояние, т.е. на подредените макросъстояния съответстват малък брой различни микросъстояния. Съгласно с уравнението на Болцман (38.1) ентропията S на подредените състояния също е малка. Когато порядъкът преминава в хаос, термодинамичната вероятност и ентропията нарастват. Можем, обобщавайки, да кажем, че ентропията е количествена мярка за степента на молекулният хаос в една макросистема. Максимален молекулен безпорядък в изолирана макросистема се установява при достигане на термодинамично равновесие. Термодинамичното равновесие се характеризира с максимална стойност на ентропията.

39. Втори принцип на термодинамиката

Закон за нарастване на ентропията

В най-общ вид вторият принцип на термодинамиката се формулира като закон за нарастване на ентропията:

В изолирана макроскопична система са възможни само такива спонтанни процеси, които водят до нарастване на ентропията на системата, т.е. ентропията на една изолирана система не може да намалява.

От гледна точка на статистическата физика законът за нарастване на ентропията има нагледен физичен смисъл: ентропията е максимална в състоянието на термодинамично равновесие, което се реализира чрез най-голям брой микросъстояния и затова има най-голяма термодинамична вероятност. Във всички неравновесни състояния системата има по-малка ентропия. Оставена сама на себе си (изолирана от околната среда), тя спонтанно, чрез неравновесни процеси, преминава последователно в състояния с нарастваща термодинамична вероятност, т.е. в състояния с все по-голяма ентропия, докато достигне равновесното си състояние. След достигане на равновесие ентропията преставя да се изменя, защото вероятността системата спонтанно да премине в неравновесно състояние е нищожно малка и такива преходи не се наблюдават.

Следователно последователността, в която протичат всички естествени (спонтанни) процеси в една изолирана неравновесна система, се определя от закона за нарастване на ентропията. Затова понякога образно наричат ентропията „стрела на времето“.

Математически законът за нарастване на ентропията на изолирана система се изразява с неравенството

$$(39.1) \quad dS \geq 0,$$

където знакът за неравенство се отнася за неравновесните процеси, а равенството – за равновесното състояние.

Неравенство на Клаузиус

Освен вътрешното „производство на ентропия“, свързано с протичащите в системата неравновесни процеси, ентропията на една термодинамична система, която е в топлинен контакт с околните тела, се изменя и в резултат на топлообмена. Пълното изменение на ентропията в този случай е

$$(39.2) \quad dS = d_1S + d_2S,$$

където d_1S е вътрешното изменение на ентропията, а $d_2S = \delta Q/T$ (вж. уравнение (37.6)) е изменението на ентропията в резултат на топлообмена. Следователно

$$(39.3) \quad dS = d_1S + \frac{\delta Q}{T}.$$

Тъй като $d_1S \geq 0$, то винаги е изпълнено неравенството

$$(39.4) \quad dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменението на ентропията при елементарен равновесен процес е равно на обменената с околната среда приведена

топлина ($dS = \frac{\delta Q}{T}$). Ако обаче процесът е неравновесен, изменението на ентропията

е по-голямо ($dS > \frac{\delta Q}{T}$), защото нерав-

новесният процес създава ентропия. Неравенство (39.4) е получено за пръв път от Клаузиус и се нарича в негова чест *неравенство на Клаузиус*.

Изменението на ентропията на една термодинамична система при преминаване от произволно начално състояние 1 в друго състояние 2 е

$$(39.5) \quad \Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T},$$

където знакът за равенство се отнася за равновесен процес, а неравенството – за случая, когато преходът от състояние 1 в състояние 2 се извършва чрез неравновесен процес. При кръгов процес изменението на ентропията на термодинамичната система е нула $\Delta S = 0$ (ентропията е еднозначна функция на състоянието, а при кръговите процеси крайното състояние на

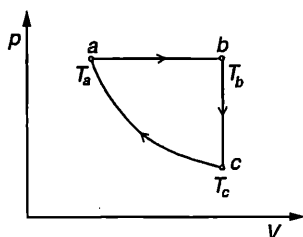
системата съвпада с нейното начално състояние). Затова при кръгов процес неравенството на Клаузиус добива вида

$$(39.6) \quad \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0.$$

Пример 39.1. Термодинамичен цикъл е съставен от изобарен процес ab , изохорен процес bc и адиабатен процес ca (фиг.39-1). Всички процеси са равновесни. Докажете, че за всяко вещество с постоянни изохорен и изобарен моларни топлинни капацитети ($C_V = \text{const}$ и $C_p = \text{const}$) температурите T_a , T_b и T_c съответно в състоянията a , b и c , са свързани със съотно-

шението $\frac{T_b}{T_c} = \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^\gamma$, където $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ е коефициентът на Поасон.

Решение. Досега при решаването на задачи



Фиг.39-1.

разглеждахме само термодинамични цикли, които се извършват с идеален газ. В случая обаче работното тяло може да е от произволно вещество. Единственото изискване е топлините му капацитети да не се променят при процесите, които се извършват с него. Следователно при решаването на задачата не можем да използваме газовите закони. Неравенството на Клаузиус (39.6) обаче е в сила за всяка термодинамична система. При равновесен кръгов процес (както в случая) то преминава в равенство

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Елементарното количество топлина, което една термодинамична система получава при изобарен процес, е $\delta Q = nC_p dT$, а при изохорен процес: $\delta Q = nC_V dT$, където n е количеството вещество (брой на молекулите). При адиабатен процес не се извършва топлообмен, т.е. $\delta Q = 0$. За равновесния кръгов процес от фиг.39-1 равенството на Клаузиус се записва

във вида

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_a}^{T_b} \frac{nC_p dT}{T} + \int_{T_b}^{T_c} \frac{nC_V dT}{T} = 0.$$

След интегриране получаваме

$$nC_p \ln \frac{T_b}{T_a} + nC_V \ln \frac{T_c}{T_b} = 0.$$

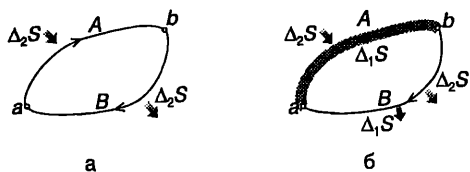
Съкращаваме n , делим на C_V , антилогаритмуваме и получаваме

$$\frac{T_b}{T_c} = \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{\frac{C_p}{C_V}} = \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^\gamma.$$

Обратими и необратими процеси

Процесът A , чрез който една термодинамична система преминава от някакво начално състояние a в друго състояние b , се нарича *обратим процес*, ако системата може да се върне обратно в началното състояние без да настъпят каквито и да било изменения в околната среда. Обратният преход може да се извърши или като се повтори в обратен ред цялата последователност от състояния, през които е преминала системата при процеса A , или чрез друг процес B . Процесът A се нарича *необратим процес*, ако обратният преход не може да се осъществи без да останат някакви изменения („следи“) в околната среда.

Всички процеси, свързани с вътрешно „производство на ентропия“, са необратими. Обратими са само процесите, при които общата ентропия на системата и околната среда не се изменя. Действително, нека при прехода от състояние a в състояние b става единствено обмен на ентропия между системата и околната среда (фиг.39-2а): например ентропията на системата нараства с $\Delta_2 S$, а на околната среда намалява с $-\Delta_2 S$. Тогава по принцип е възможен и обратният процес, при който системата ще отдаде на околната среда същото количество ентропия, каквото е получила при процеса A . След този обратен преход от състояние b в състояние a се възстановяват началните стойности на ентропията както на системата, така и на околната среда. Следователно в резултат на двата процеса не са



Фиг.39-2.

останали никакви изменения в околната среда – процесът A е обратим. Нека сега при процеса A системата да получава ентропия $\Delta_2 S$ от околната среда и едновременно с това да се извършва вътрешно „производство на ентропия“ $\Delta_1 S$ (фиг.39-2). Съгласно с втория принцип на термодинамиката веднаж създадена, ентропията $\Delta_1 S$ не може да бъде унищожена, тя може само да се преразпределя между системата и околната среда. Нека чрез някакъв процес B върнем системата от състояние b в началното състояние a . Възможни са само процеси, при които общата ентропия на системата и околната среда нараства или не се изменя. Следователно, след като системата се върне в началното си състояние, тя възстановява първоначалната стойност на ентропията си (ентропията е еднозначна функция на състоянието), но ентропията на околната среда се оказва по-голяма от началната (най-малко с $\Delta_1 S$). Такъв процес според даденото определение е необратим, защото след връщане на системата в началното състояние са останали трайни изменения в околната среда – нейната ентропия е нараснала.

Всички равновесни процеси са обратими, а неравновесните процеси са необратими. Необратими са процесите на топлопроводност, разширяването на газ във вакуум, дифузията и др. Строго погледнато всички реални процеси са неравновесни, поради което са и необратими.

Пример 39.2. Опитът на Джаул (фиг.31-1 на стр.168) се извършва с $n = 2$ mol идеален газ. След отварянето на крана газът се разширява във вакуум и увеличава обема си 2 пъти. Определете изменението на ентропията на газа при свободното му разширение във вакуум.

Решение. Разширението на газ във вакуум е неравновесен (необратим) процес. Затова, независимо че процесът е адиабатен (газът не

обменя топлина с околната среда), ентропията на газа нараства. Началното състояние a и крайното състояние b на газа са равновесни състояния. Тъй като ентропията е еднозначна функция на състоянието, изменението ѝ при преминаването от състояние a в състояние b $\Delta S = S_b - S_a$ е едно и също за всички възможни процеси, които свързват двете състояния, независимо дали са равновесни или са неравновесни. Това дава възможност за пресмятане изменението на ентропията да се избере подходящ равновесен процес. При разширението на идеален газ във вакуум вътрешната енергия, а следователно и температурата на идеалния газ, не се променят. Затова в случая е най-удобно да се избере изотермен процес на разширение на газа от обем V_a до обем $V_b = 2V_a$. При изотермно разширение газът получава количество топлина (вж. пример 30.1 на стр.163)

$$Q = A = nRT \ln \frac{V_b}{V_a} = nRT \ln 2.$$

Изменението на ентропията на газа при изотермното разширение е

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln 2 = 11,5 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Същото е изменението на ентропията при свободното разширение на газа във вакуум, както и при всички останали процеси, чрез които той може да премине от началното състояние a в крайното състояние b .

“Топлинната смърт” на Вселената

При обсъждането на обратимите и необратимите процеси в една макроскопична система разгледахме системата и околната среда като една обща изолирана система. Всички спонтанни процеси в тази изолирана система съгласно с втория принцип на термодинамиката водят до нарастване на нейната ентропия. Клаузиус обобщава този подход и разглежда цялата Вселена като затворена термодинамична система. За Вселената като цяло Клаузиус дава следната кратка формулировка на първия и на втория принцип на термодинамиката: „Енергията на Вселената остава постоянна. Ентропията на Вселената се стреми към максимум“. Оттук той стига до извода, че рано или късно Вселената ще достигне състояние на термодинамично равновесие, т.е. ще настъпи „топлинна смърт“, когато навсякъде ще се установи една и съща температура и ще

се прекратят всички процеси.

Болцман отхвърля теорията за "топлинната смърт" на Вселената, като се позовава на статистическата природа на втория принцип на термодинамиката. Според статистическата физика равновесното състояние е най-вероятното състояние. По принцип са възможни произволни спонтанни отклонения (флуктуации) от това състояние. Вероятността за големи флуктуации в ограничените системи обаче е пренебрежимо малка. Според „флуктуационната хипотеза“ на Болцман, Вселената като цяло се намира в термодинамично равновесие, но тъй като тя е безкрайно голяма, в нея неизбежно възникват гигантски флуктуации. Всяка флуктуация постепенно затихва, но в друга част от Вселената възниква нова флуктуация – едни светове загиват, а други се раждат.

Съвременната наука изказва сериозни възражения както към изводите на Клаузиус, така и към „флуктуационната хипотеза“ на Болцман. Най-общо може да се каже, че вторият принцип на термодинамиката е обобщение на човешкия опит, натрупан при изследването на една ограничена част от заобикалящата ни среда. Затова пренасянето на закономерностите, установени за системи с краен (макар и много голям) брой частици, към безкрайната Вселена е неправомечно.

Формулировки на втория принцип на термодинамиката

Най-общата формулировка на втория принцип на термодинамиката съдържа две независими твърдения:

1. За всяка равновесна термодинамична система съществува еднозначна функция на състоянието, наречена ентропия.

2. В една изолирана (или адиабатно изолирана) система не са възможни процеси, при които ентропията да намалява.

В §37 изложихме в опростен вариант доказателството на Клаузиус за съществуването на ентропията, като използвахме първата теорема на Карно за КПД на цикъла на Карно. С помощта на втората теорема на Карно, според която машината на Карно има максимален КПД, може да се докаже и второто твърдение, че ентропия-

та на изолирана система не може да намалява. Не е трудно да се направи и обратното: с помощта на закона за ентропията да се докажат теоремите на Карно. Следователно теоремите на Карно могат да се разглеждат като друга, еквивалентна на закона за съществуването и нарастването на ентропията формулировка на втория принцип на термодинамиката.

Вечен двигател от втори род. Както вече многократно беше отбелязано, топлинните машини имат три елемента – нагревател, работно тяло и охладител. Възможно ли е топлинна машина да работи без охладител? Такъв проект изглежда много примамлив, защото би дал възможност да се извършва работа, например за сметка на охлаждането на световния океан, който за нас е един практически неизчерпаем източник на топлинна енергия, без да се отделя „излишна“ топлина. Опитът обаче показва, че това не е възможно. Невъзможността да се построи вечен двигател от II род, т.е. такава периодична машина, единственият резултат от действието на която да е превръщането на част от вътрешната енергия на един топлинен резервоар в работа, е била издигната от У. Томсън в постулат. Постулатът на Томсън е една от формулировките на втория принцип на термодинамиката. Не е трудно да покажем, че съществуването на вечен двигател от II род е в противоречие със закона за нарастване на ентропията. Действително, топлинният резервоар и работното тяло на вечния двигател могат да се разглеждат като една обща система, която е адиабатно изолирана от околната среда: вечният двигател извършва работа над околната среда, но не обменя количество топлина с нея. След един пълен цикъл работното тяло на машината се връща в изходното си състояние, т.е. неговата ентропия се възстановява. От топлинния резервоар е отнето количество топлина Q_1 (по отношение на резервоара $Q_1 < 0$) и ентропията му е намаляла с $\Delta S = Q_1/T$. Стигаме до извода, че в резултат на действието на вечния двигател от II род ентропията на топлинния резервоар и на цялата адиабатно изолирана система намалява, което е в про-

творение със закона за ентропията: *ентропията на адиабатно изолирана система не може да намалява*. Следователно такъв двигател не е възможен.

Формулировка на Клаузиус. През 1850 г., преди още да открие ентропията, Клаузиус дава следната формулировка на втория принцип на термодинамиката: *топлината не може самопроизволно, т.е. без никакви изменения в околната среда, да преминава от по-студено към по-топло тяло*. Всекидневният опит ни учи, че при топлинен контакт между две тела по-топлото тяло се охлажда, а по-студеното тяло се нагрява, докато обратното никога не се наблюдава. Формулираният от Клаузиус принцип обаче не се изчерпва само със случая на теплообмен при непосредствен контакт. Според Клаузиус е принципино невъзможно по какъвто и да е начин (например чрез топлинно излъчване на едно тяло и фокусиране на лъчите върху друго тяло) да се отнеме топлина от по-студеното тяло и да се предаде на по-топлото тяло и при това да не настъпят никакви изменения в околната среда. Ще обърнем внимание, че пренасяне на топлина от по-студено към по-топло тяло изобщо е възможно. Например в домашния хладилник се отнема количество топлина от продуктите в хладилната камера и се предава на по-топлия въздух в стаята. Това пренасяне на топлина обаче не е единствен резултат. То е възможно, защото външни сили извършват работа – компресорът на хладилника консумира електроенергия, т.е. действието на хладилната машина е свързано с изменения в околната среда.

Въображаем процес, чрез който се осъществява пренасяне на топлина от по-студено към по-топло тяло без никакви изменения в околната среда, се нарича процес на Клаузиус. Доказва се, че процесът на Клаузиус противоречи на закона за нарастване на ентропията.

Заключение

Вторият принцип на термодинамиката е един от основните природни закони. Той може да се формулира по различен начин, като най-общата му формулировка е законът за съществуването на ентропия-

та и за нейното нарастване в изолираните системи. Подобно на енергията, ентропията не може да бъде унищожена. За разлика от енергията обаче, която не може и да се създава, а само се преобразува от един вид в друг, ентропия се създава. Всички неравновесни процеси раждат ентропия. Веднаж създадена, тя не може да бъде унищожена. Често в механиката енергията се разглежда като количествена мярка за способността на телата да извършват работа. Например издигнатият над земната повърхност камък има потенциалната възможност да извърши работа, ако бъде пуснат да пада (например може да завърти колелото на мелница). След като камъкът се удари в земята, кинетичната му енергия се превръща във вътрешна енергия – камъкът и земната повърхност се загряват. Пълната енергия на системата камък – Земя се запазва, но потенциалната възможност за работа изчезва, а ентропията нараства. Следователно нарастването на ентропията, съпровождащо превръщането на различните видове енергия във вътрешна енергия, може да се разглежда като необратима загуба на потенциалната възможност да се извърши работа. Можем образно да сравним ентропията с инфлацията. Така както инфлацията обезценява парите в една държава и намалява тяхната покупателна способност, така и ентропията „деградира“ енергията и намалява потенциалната възможност за извършване на работа в една макросистема. Всички естествени процеси в изолираните системи водят до деградация на енергията (превръщането ѝ във вътрешна енергия) и до нарастване на ентропията, т.е. до намаляване на потенциалната възможност за извършване на работа.

Реални газове и течности



В тази глава ще разгледаме някои от свойствата на реалните газове, които остават извън рамките на модела идеален газ (например втечняването на газовете). Ще се спрем на преходите между различни фази на едно вещество и на условията за равновесие между фазите. Ще проследим явленията в повърхностния слой на течностите и ще илюстрираме с примери тяхното практическо приложение.

40. Вандерваалсов газ. Втечняване на газовете

Уравнение на Ван дер Ваалс

При определени условия поведението на реалните газове съществено се отличава от това, което предвижда моделът на идеалния газ. Например при свиване реалните газове могат да се втечнат, което не се обяснява от уравнението на Клапейрон-Менделеев. Основният недостатък на модела на идеалния газ е в това, че той заменя сложните по своя характер сили на привличане и отблъскване между молекулите с еластичен удар. Емпирично са установени повече от 150 уравнения, които се използват за по-точно описване състоянието на реалните газове. В тях молекулните сили се отчитат чрез въвеждане на различни константи, които се определят експериментално. Най-простото от тези уравнения е получено през 1873 г. от холандския физик Ван дер Ваалс (1837–1923) и носи неговото име. Ван дер Ваалс въвежда в уравнението за състоянието $pV = RT$ на 1 mol идеален газ две поправки, чрез които отчита молекулните сили на привличане и на отблъскване.

Уравнението на Ван дер Ваалс за 1 mol газ има вида

$$(40.1) \quad \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

където V е моларният обем на газа (измерва се в единици m^3/mol), a и b са константи, които не зависят от температурата. Константата a отчита силите на взаимно привличане между молекулите. Поради взаимното привличане между молекулите, освен налягането p , определено в модела на идеалния газ, при реалните газове възниква допълнително молекулно на-

лягане $p_m = \frac{a}{V^2}$. Силите на отблъскване се отчитат чрез втората константа b . Тъй като силите на отблъскване рязко нарастват на малки разстояния, молекулите не могат да се доближат една до друга на разстояния, по-малки от ефективния диа-

метър на молекулите. Това ограничение се отчита в уравнението на Ван дер Ваалс, като моларният обем V (обемът на съда, в който се намира 1 mol газ) се заменя с някакъв по-малък ефективен обем $V - b$, достъпен за движение на молекулите.

Газ, който точно се подчинява на уравнение (40.1), се нарича *вандерваалсов газ*. В действителност, за реалните газове константите a и b в уравнение (40.1) зависят от температурата. Установено е също така, че при голямо налягане поведението на реалните газове съществено се отклонява от уравнението на Ван дер Ваалс. Независимо от това уравнението на Ван дер Ваалс може да се използва при всяка температура и налягане за качествено описване поведението на реалните газове и на тяхното втечняване.

Пример 40.1. Запишете уравнението на Ван дер Ваалс за n mol газ.

Решение. Уравнението за състоянието на идеалния газ често се записва по два начина:

1. за n mol газ: $pV = nRT$;
2. за 1 mol газ: $pV = RT$.

Тъй като n е размерна физична величина (mol), в двете уравнения обемът V има различна размерност: В първото уравнение V е обемът на газа (измерва се в m^3), докато във второто уравнение V е моларният обем (измерва се в m^3/mol).

В уравнението на Ван дер Ваалс (40.1) V е моларният обем. Ще означим временно моларния обем с V_m и ще запишем уравнение (40.1) във вида

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

Обемът V на n mol газ е $V = nV_m$. В уравнението на Ван дер Ваалс замества $V_m = V/n$ и получаваме

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Това е уравнението на Ван дер Ваалс, записано за произволно количество (n mol) газ. В него V е целият обем, зает от газа.

Изотерми на вандерваалсов газ

Качествените различия между идеалния газ и вандерваалсовия газ изпъкват най-

ясно, когато се съпоставят изотермите на двата газа. При много високи температури различията са само количествени. Действително, да запишем уравнение (40.1) във вида

$$(40.2) \quad p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

При високи температури едночленът a/V^2 може да се пренебрегне и на pV -диаграма изотермите ($T = \text{const}$) се представят с хиперболите (крива 1 на фиг.40-1)

$$(40.3) \quad p = \frac{RT}{V-b},$$

които са подобни на хиперболите $p = RT/V$, изразяващи закона на Бойл-Мариот при идеалните газове. От уравнение (40.3) се вижда, че асимптоти на хиперболите $p(V)$ са изобарата $p = 0$ и изохората $V = b$. Всяка друга изобара $p = \text{const}$ пресича такава изотерма само в една точка.

За да изследваме вида на изотермите на вандерваалсовия газ при произволни температури, ще умножим двете страни на уравнение (40.1) по V^2 . След елементарни преобразования се получава

$$(40.4) \quad pV^3 - (RT + pb)V^2 + aV - ab = 0.$$

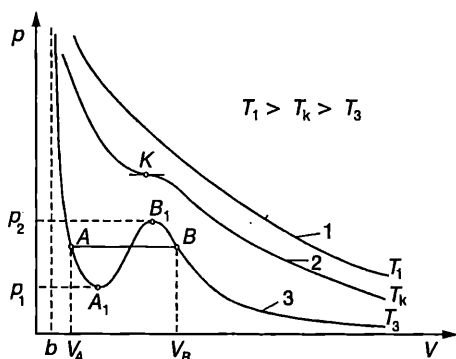
Това е кубично уравнение за обема V , в което температурата T и налягането p влизат като параметри. Тъй като всички коефициенти са реални, съгласно с теорията на кубичните уравнения уравнение (40.4) може да има или само един или три реални корена. При зададени стойности $p = p_i$ и $T = T_i$ на двата параметъра, на pV -диаграмата на всеки корен съответства

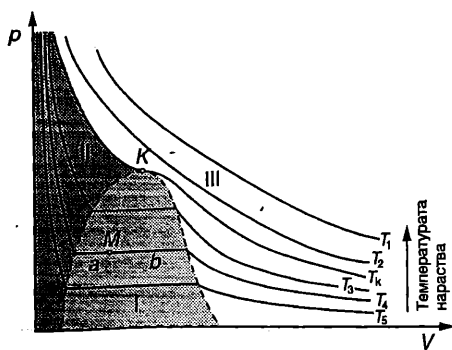
точка, в която изобарата $p = p_i$ пресича изотермата $T = T_i$. Както видяхме по-горе, при високи температури (изотерма 1 на фиг.40-1) пресечната точка е само една, т.е. уравнение (40.4) има само един реален корен. При по-ниски температури и подходящи стойности на налягането реалните корени са три (V_1 , V_2 и V_3). Този случай се илюстрира с изотермата $T = T_3$ от фиг.40-1, която се пресича в три точки от всички изобари, разположени между изобарите $p = p_1$ и $p = p_2$. За разлика от изотермите при високи температури (крива 1), при които налягането монотонно намалява при увеличаване на обема, изотермите с по-ниска температура съдържат вълнообразен участък (участъкът AB на крива 3), в който налягането отначало намалява (AA_1), после нараства (AB_1) и отново намалява (B_1B). При определена междинна температура T_k уравнение (40.4) има три еднакви корена $V_1 = V_2 = V_3 = V_k$ (крива 2 на фиг.40-1). Температурата T_k се нарича *критична температура*, а съответстващата ѝ изотерма – *критична изотерма*. Критичната изотерма монотонно се спуска надолу. Тя няма екстремуми, а само една инфлексна точка K , допирателната в която е хоризонтална. Точката K се нарича *критична точка*. Състоянието на веществото, което съответства на критичната точка, се нарича *критично състояние*. То се характеризира с критични параметри: критично налягане p_k , критичен обем V_k и критична температура T_k .

Изотерми на реален газ

Доказва се, че състоянията, съответстващи на вълнообразния участък AB (фиг.40-1) от изотермите на вандерваалсовия газ са неустойчиви, поради което в действителност или изобщо не се реализират, или само част от тях могат да се достигнат при специални условия (това са т. нар. метастабилни състояния, които тук няма да разглеждаме). Експерименталните изследвания показват, че когато реален газ се свива изотермно при температура T , която е по-ниска от критичната температура T_k ($T < T_k$), отначало (при обем $V > V_B$) изотермата на реалния газ практически съвпада с изотермата на вандерваал-

Фиг.40-1. Изотерми на вандерваалсов газ.





Фиг.40-2. Изотерми на реален газ.

совия газ (крива 3 на фиг.40-1). В точка В обаче състоянието на газа става неустойчиво и той започва да се втечнява. Казано с други думи, започва разпадането на еднородната до този момент газова термодинамична система на две физически еднородни части или фази – газова фаза и течна фаза. При по-нататъшното свиване налягането не се изменя, докато не се достигне състояние А, в което газът изцяло се е превърнал в течност и системата отново е станала еднородна. След това се извършва изотермно свиване на получената течност, което отново добре се описва от изотермата на Ван дер Ваалс. Следователно вместо вълнообразна област реалните изотерми съдържат хоризонтален участък, в който системата е двуфазна.

На фиг.40-2 са показани няколко изотерми на реален газ. Прекъснатата линия, която съединява краищата на хоризонталните участъци на изотермите, отделя на pV -диаграмата двуфазната област I, в която двете фази – течна и газова, се намират в равновесие помежду си. По-тъмната област II на диаграмата съответства на течната фаза, а областта III – на газовата фаза на веществото.

Отношението на масата m_t на течността към масата на газа m_r в произволно състояние М от хоризонталния (двуфазен) участък на една изотерма се определя по правилото на лоста: то е равно на отношението b/a на отсечките, на които точка М дели хоризонталната част от изотермата (фиг.40-2)

$$(40.5) \quad \frac{m_t}{m_r} = \frac{b}{a}.$$

От фиг. 40-2 се вижда, че при нарастване на температурата хоризонталният участък на съответните изотерми става все по-тесен и за критичната изотерма той се свива в една точка – критичната точка К. Изотермите, които съответстват на температури $T > T_k$, изобщо нямат хоризонтален участък. Оттук следва изводът, че газовете могат да бъдат втечнени чрез свиване само ако температурата е по-ниска от критичната температура T_k за съответния газ. Изотермното свиване при надкритични температури води до непрекъснато увеличаване на плътността на газа, без той да се превръща в течност. В таблица 40.1 са дадени критичните температури и критичното налягане за някои вещества.

Таблица 40.1. Критична температура и критично налягане за някои вещества.

Вещество	Критична температура °C	Критична температура K	Критично налягане atm
Вода, H ₂ O	374	647	218
Хлор, Cl ₂	144	417	76
Кислород, O ₂	-118	155	50
Азот, N ₂	-147	126	33,5
Водород, H ₂	-240	33,3	12,8
Хелий, He	-267,9	5,3	2,3

В зависимост от температурата, често се използват два различни термина за газовата фаза на едно вещество. Когато температурата е по-ниска от критичната, се предпочита терминът *пар* – парите могат да се втечнат чрез изотермно свиване. При надкритични температури се използва терминът *газ*.

Задачи

1. Покажете, че работата, която извършва 1 mol вандерваалсов газ при изотермно разширение от обем V_1 до обем V_2 , е

$$A = RT \ln \left(\frac{V_2 - b}{V_1 - b} \right) + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

41. Фазови преходи

Фази

Фаза се нарича съвкупността от еднородни и еднакви по своите свойства макроскопични части от една термодинамична система, които са отделени от останалите части на системата с гранични повърхности и могат да се извлекат от нея по механичен начин. Ще поясним даденото определение с няколко примера:

1. В чаша с вода плават парчета лед. Системата е двуфазна: по механичен път парчетата лед (твърда фаза) могат да се отделят от водата (течна фаза).

2. На повърхността на чаша с вода е налят слой от олио. В случая също имаме двуфазна система. Двете течни фази (вода и олио) са разделени от гранична повърхност.

3. При мъгла малките водни капки и въздухът също образуват двуфазна система, съставена от газова и течна фаза. Всяка капчица е отделена от въздуха с гранична повърхност.

В една система може да има няколко твърди или течни фази, но само една газова фаза, тъй като всички газове се смесват помежду си. Например въздухът е еднофазна система, независимо, че представлява смес от различни газове. Две несмесващи се течности образуват двуфазна система, а смесващите се течности след разбъркване образуват еднофазна система.

Фазово равновесие

Пример за различни фази на едно и също вещество са трите му агрегатни състояния: твърдо, течено и газово. За някои кристални вещества твърдото състояние може да се реализира чрез различни кристални модификации. Това явление се нарича *полиморфизъм*. Например диамантът и графитът са две различни твърди фази на въглерода, които се различават една от друга по кристалната си структура. Друг пример е ледът, който има 9 полиморфни разновидности. Важна задача на термодинамиката е да установи условията, при

които система, съставена от две или повече фази на едно вещество, се намира в равновесие. Фазовото равновесие включва топлинно и механично равновесие. За топлинното равновесие е необходимо всички фази от системата да имат еднаква температура. Когато две фази са разделени с плоска граница, условието за механично равновесие се свежда до изискването налягането от двете страни на границата да е еднакво. За фазовото равновесие е необходимо и още едно условие: масата на всяка една от фазите да не се променя с течение на времето, т.е. да не става превръщане на веществото от една фаза в друга фаза.

Експерименталните и теоретичните изследвания показват, че равновесие между две фази на едно вещество може да съществува само в определен температурен интервал. На всяка стойност на температурата T в този интервал съответства точно определено налягане p , при което равновесието е възможно. На pT -диаграма състоянието на равновесие между две фази се представя с линията

$$(41.1) \quad p = f(T).$$

Доказва се, че три фази на едно вещество могат да са в равновесие само при една единствена стойност T_t на температурата и p_t на налягането. На pT -диаграмата на това равновесно състояние съответства точка с координати (T_t, p_t) , наречена *тройна точка*. Равновесие на повече от три фази на едно вещество изобщо не е възможно.

Фазови преходи от първи род

Преминаването на веществата от една фаза в друга се нарича фазов преход. Обикновено фазовите преходи са съпроводени с поглъщане или с отделяне на определено количество топлина, наречено *скрита топлина* или само *топлина на прехода*.

Фазови преходи, при които се отделя или се поглъща топлина, се наричат фазови преходи от първи род.

Те са свързани с промяна на обема, енергията и ентропията на веществото.

Примери за фазови преходи от първи род са преходите между различните агрегатни състояние на веществото. Преходът от твърда в течна фаза се нарича топене, а обратният преход от течна в твърда фаза – втвърдяване или кристализация. При нормално атмосферно налягане кристалните твърди тела се топят при точно определена температура, наречена температура на топене. Аморфните твърди тела, например стъклото и асфалта, нямат определена температура на топене. При нагряване те се размекват и постепенно преминават в течено състояние.

Количеството топлина, необходимо за разтопяването на единица маса от кристално вещество, нагрят до температурата на топене, се нарича специфична топлина на топене λ . От определението следва, че тяло с маса m трябва да погълне количество топлина

$$(41.2) \quad Q = \lambda m,$$

за да се разтопи. Съгласно със закона за запазване на енергията обратният процес на кристализация е съпроводен с отделяне на същото количество топлина, каквото се поглъща при топенето.

Преминаването на веществото от течна в газова фаза се нарича изпарение или парообразуване. Количеството топлина, необходимо за изпарение на единица маса от веществото, се нарича специфична топлина на изпарение (парообразуване) r . Необходимото количество топлина Q за изпаряване на m килограма от веществото е

$$(41.3) \quad Q = rm.$$

Пример 41.1. Пресметнете изменението на ентропията при разтапянето на 0,5 kg лед, намиращ се при температура 0 °C. Специфичната топлина на топене на леда е $\lambda = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$.

Решение. Ще разглеждаме топенето на леда като равновесен процес, протичащ при постоянна температура $T = 273 \text{ K}$, при който термодинамичната система поглъща количество топлина $Q = \lambda m$. Наравнестото на ентропията е

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{\lambda m}{T};$$

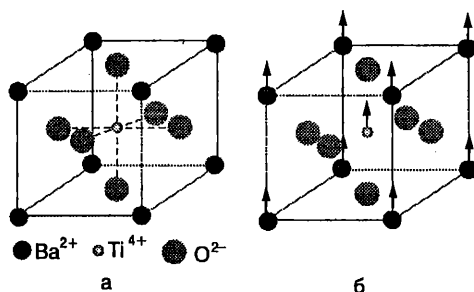
$$\Delta S = \frac{(3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg})(0,5 \text{ kg})}{273 \text{ K}} = 610 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Фазови преходи от втори род

При фазовите преходи от първи род става скокообразно изменение на състоянието на веществото. Например, ако се нагрее до температурата на топене, кристал преминава скокообразно от твърдо в течно състояние. При полиморфните превръщания в точката на фазовия преход веществото преминава от една кристална модификация в друга, т.е. става скокообразно изменение в симетрията на подреждане на атомите в кристала. Характерно за фазовите преходи от I род е, че в точката на прехода двете фази съществуват едновременно, намират се в равновесие помежду си и имат различни свойства.

Съществуват и друг вид фазови преходи, при които измененията в състоянието на веществото се извършват постепенно (плавно), а не скокообразно. Например при високи температури кристалът BaTiO_3 има кубична структура, като във върховете на елементарния куб (фиг. 41-1) са разположени йони на бария (Ba^{2+}), в средата на стените – йони на кислорода (O^{2-}), а в центъра на куба – йони на титана (Ti^{4+}). Когато температурата намалява и достигне определена стойност T_k , йоните Ba^{2+} и Ti^{4+} започват да се изместват спрямо йоните на кислорода O^{2-} в направление на едно от ребрата на куба и се променя симетрията на кристала: кубът се деформира. Такива плавни изменения в структу-

Фиг.41-1. Фазов преход от втори род. а) Високотемпературната фаза на бариевия титанат е кубична: във върховете на куба са разположени йоните Ba^{2+} , в центъра на стените на куба – йоните O^{2-} , а йонът Ti^{4+} е в центъра на куба. б) Под температура на фазовия преход структурата легко се деформира: йоните Ba^{2+} и Ti^{4+} се отместват спрямо йоните на кислорода O^{2-} .



рата на кристала се наричат фазов преход от втори род. При температурата T_k на фазовия преход кубът не е деформиран и нискотемпературната фаза на бариевия титанат съвпада с кубичната високотемпературна фаза.

Друг пример за фазов преход от втори род е преминаването на някои вещества от парамагнитно във феромагнитно състояние. В случая кристалната структура не се променя, а стават само изменения в разположението на елементарните магнитни моменти – те преминават от неподредено състояние (високотемпературна парамагнитна фаза) в по-подредено състояние (нискотемпературна феромагнитна фаза). Преходът на някои метали, сплави и керамики в свръхпроводящо състояние също е фазов преход от втори род. При него стават изменения само в електронната система на веществото – в свръхпроводящо състояние тя е „по-подредена“.

За разлика от фазовите преходи от първи род, преходите от втори род не са свързани с поглъщане или отделяне на топлина. В точката на прехода не се изменят също така обемът, вътрешната енергия и ентропията. Фазовите преходи от втори род обикновено са съпроводени само със скокообразни изменения на топлинните капацитети и на коефициентите на топлинно разширение.

Пример 41.2. При ниски температури топлинният капацитет C_n на металите е пропорционален на абсолютната температура T : $C_n = aT$. Ако металът премине в свръхпроводящо състояние, зависимостта става: $C_s = bT^3$ (a и b са константи). Докажете, че в точката на фазовия преход T_k топлинният коефициент търпи скок $\Delta C = C_s - C_n = 2aT_k$.

Решение. От данните в условието на задачата можем да определим зависимостта на ентропията S на метала от температурата във високотемпературната (n – нормална) фаза и в нискотемпературната (s – свръхпроводяща) фаза. От определението за топлинен капацитет $C_n = \delta Q/dT$ и от уравнението на втория принцип на термодинамиката $\delta Q = TdS_n$ следва, че: $C_n = aT = TdS_n/dT$. След непосредствено интегриране получаваме: $S_n = aT$. Аналогично: $C_s = bT^3 = TdS_s/dT$, откъдето след инте-

гриране получаваме: $S_s = bT^3/3$.

В точката на фазовия преход от втори род ентропията не се изменя, т.е. $S_n(T_k) = S_s(T_k)$ или $aT_k = bT_k^3/3$. От последното равенство намираме връзката между коефициентите a и b :

$$b = \frac{3a}{T_k^2}.$$

Търсеният скок в топлинния капацитет на метала при фазовия преход от втори род нормален метал-свръхпроводник е

$$\Delta C = C_s - C_n = \left(\frac{3a}{T_k^2} \right) T_k^3 - aT_k = 2aT_k.$$

Задачи

1. Течният хелий има много ниска температура на кипене 4,2 K (при нормално атмосферно налягане) и много малка специфична топлина на парообразуване $r = 2,1 \cdot 10^4$ J/kg (около 100 пъти по-малка от тази на водата). За да се сведе до минимум топлообменът с околната среда, течният хелий се съхранява в специални съдове, чиято външна част се охлажда от течен азот. Пресметнете загубите на течен хелий поради изпарението за едно денонощие, ако хелият в съда получава при топлообмена с околната среда постоянна топлинна мощност 0,2 W.
2. За разтапяне на топка от мокър сняг е необходимо два пъти по-малко количество топлина, отколкото за стопяване на парче лед със същата маса, чиято начална температура е -10°C . Колко процента е водата в снежната топка? Специфичният топлинен капацитет на леда е 2100 J/(kg·K), а специфичната му топлина на топене е 333 kJ/kg.
3. Пресметнете изменението на ентропията на 2 kg алуминий, който се втвърдява при постоянна температура 660°C (температура на топене и на втвърдяване на алуминия). Специфичната топлина на топене на алуминия е $4 \cdot 10^5$ J/kg.
4. Айсберг с маса 10^{10} kg е носен от течението Гълфстрийм, температурата на чиято вода е 22°C . Температурата на леда е 0°C .
 - а) Колко е максималният възможен КПД на топлинна машина, която използва водата на течението за нагревател, а айсбергът – за охладител?
 - б) Колко механична работа ще извърши такава машина, докато айсбергът се разтопи? Специфичната топлина на топене на леда е $3,33 \cdot 10^5$ J/kg.

42. Уравнение на Клапейрон–Клаузиус. Фазови диаграми

Уравнение на Клапейрон–Клаузиус

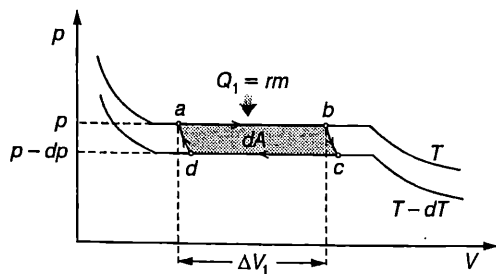
За решаването на разнообразни по своя характер задачи се използва т.нар. метод на термодинамичните цикли: разглежда се обратим цикъл (най-често цикъл на Карно), за който се прилагат първият и вторият принцип на термодинамиката. Ще използваме този метод, за да изразим скритата топлина на изпарение r като функция на термодинамичните параметри на веществото.

На фиг.42-1 са показани две безкрайно близки изотерми на втечняване на дадено вещество с температури съответно T и $T - dT$. Съставяме елементарен цикъл на Карно, включващ изотермите ab и cd и адиабатите bc и da . Изотермното разширение ab на двуфазната система течност – наситена пара се извършва при постоянно налягане p , а изотермното свиване cd – при постоянно налягане $p - dp$. (Наситени пари се наричат пари, които са в равновесие със своята течност.) При процеса ab вещество с маса m преминава от течно в газово състояние, при което обемът нараства с $\Delta V_1 = m(v_n - v_r)$, където v_n е специфичният обем на парата (обем на единица маса от парата), а v_r е специфичният обем на течността. При изотермното разширение ab системата извършва положителна работа

$$(42.1) \quad A_1 = p\Delta V_1 = pm(v_n - v_r).$$

Тъй като двете изотерми са безкрайно

Фиг.42-1.



но близки, изменението на обема при изотермното свиване е $\Delta V_2 = -\Delta V_1$ (разликата в абсолютните стойности на двете величини е безкрайно малка величина от втори порядък, която се пренебрегва). Работата на системата при процеса cd е

$$(42.2) \quad A_2 = (p - dp)\Delta V_2 = -(p - dp)m(v_n - v_r).$$

При адиабатното разширение системата върши положителна работа, а при адиабатното свиване – отрицателна работа. Тъй като двете изотерми са безкрайно близки, общата работа при адиабатните процеси също е безкрайно малка величина, но от втори порядък, и се пренебрегва. Общата работа за един цикъл е

$$(42.3) \quad dA = A_1 + A_2 = m(v_n - v_r)dp,$$

където е отчетено, че за елементарния цикъл на Карно общата работа е безкрайно малка величина, тъй като стойностите на A_1 и A_2 са много близки по големина и имат противоположни знаци.

Системата получава топлина от околната среда само при изотермното разширение ab . (При изотермното свиване системата отдава топлина, а при адиабатните процеси няма топлообмен.) Погълнатото количество топлина Q_1 се използва за превръщане на вещество с маса m от течност в наситена пара при постоянна температура T и постоянно налягане p , т.е. $Q_1 = rm$, където r е специфичната топлина на изпарение. Съгласно с теоремата на Карно, КПД на цикъла на Карно е

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

В случая: $A = dA = m(v_n - v_r)dp$; $Q_1 = rm$; $T_1 = T$ и $T_2 = T - dT$. След заместване и елементарни преобразования за специфичната топлина на изпарение r получаваме

$$(42.4) \quad r = (v_n - v_r)T \frac{dp}{dT}.$$

Това уравнение се нарича уравнение на Клапейрон–Клаузиус. От него може да се пресметне специфичната топлина на парообразуване r . За целта експериментално се измерва зависимостта $p(T)$ на налягането p на наситените пари от тем-

пературата T , пресмята се производната dp/dT от уравнението на Клапейрон–Клаузиус (42.4) се определя r .

Съгласно с теоремата на Карно КПД на цикъла на Карно не зависи от вида на работното вещество. Затова направеният извод на уравнението на Клапейрон–Клаузиус остава в сила и за другите фазови преходи от първи род. В общия случай то се записва във вида

$$(42.5) \quad q_{12} = (v_2 - v_1)T \frac{dp}{dT},$$

където q_{12} е специфичната топлина на прехода от фаза 1 във фаза 2, а v_1 и v_2 са специфичните обеми на веществото в двете фази.

Пример 42.1. Определете температурната зависимост на налягането на наситените водни пари, ако е известно, че при нормално атмосферно налягане водата кипи при температура 100°C .

Указание. В уравнението на Клапейрон–Клаузиус (42.4) да се пренебрегне температурната зависимост на специфичната топлина на изпарение r . Да се пренебрегне също така специфичният обем v_g на течността, тъй като той е много по-малък от специфичния обем v_n на парата. Водните пари да се разглеждат като идеален газ.

Решение. От уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = \frac{m}{M}RT$ изразяваме специфичния обем на водните пари

$$v_n = \frac{V}{m} = \frac{RT}{Mp}.$$

В уравнението на Клапейрон–Клаузиус заместваем v_n , полагаме $v_t = 0$ и получаваме:

$$r = \frac{RT^2}{Mp} \frac{dp}{dT} \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = \frac{rM}{RT^2} dT.$$

Тъй като сме приели специфичната топлина на изпарение r за константа, горното уравнение се интегрира непосредствено и се получава:

$$p = C \exp\left(-\frac{rM}{RT}\right).$$

Константата C определяме от условието, че при температура $T = T_0 = 373\text{ K}$ налягането на наситените водни пари е равно на нормал-

но атмосферно налягане $p = p_0 = 1\text{ atm} \approx 10^5\text{ Pa}$. (Ще припомним известния от училищния курс по физика факт, че водата започва да кипи, когато налягането на наситените пари стане равно на външното налягане.) След замества-

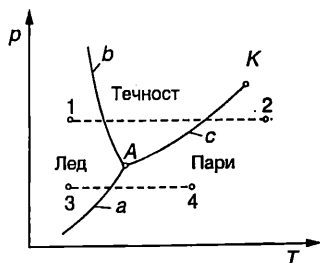
не получаваме $C = p_0 \exp\left(\frac{rM}{RT_0}\right)$. Търсената температурна зависимост на налягането на наситените водни пари е

$$p = p_0 \exp\left\{\frac{rM}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\}.$$

Фазови диаграми

В повечето случаи интегриране на уравнението на Клапейрон–Клаузиус (42.5) и получаване на аналитичен израз за кривата $p = f(T)$, описваща равновесието между две фази, е невъзможно, тъй като не са известни температурните зависимости на специфичните обеми на фазите и на специфичната топлина на прехода. Това налага тези криви да се определят експериментално. На pT -диаграмата от фиг.42-2 са показани кривите на фазово равновесие между трите агрегатни състояния (фази) на водата. Кривата на сублимация a разделя твърдата фаза (лед) от газовата фаза (водни пари). Твърдата фаза и течната фаза са разделени от кривата на топене b , а течната фаза и газовата фаза – от кривата на изпарение c . Трите криви се пресичат в тройната точка A , в която трите фази се намират в равновесие помежду си. Температурата на тройната точка на водата е $0,01^\circ\text{C}$ и, както вече беше отбелязано (вж. стр.155), е единствената реперна точка в скалата на газовия термометър. Налягането на наситени-

Фиг.42-2. Фазова диаграма на водата.



те водни пари в тройната точка е 611,2 Па. Кривата на изпарение се прекъсва също и в критичната точка K .

Кривите a , b и c в близост до тройната точка A могат да се анализират качествено с помощта на уравнението на Клаузиус–Клапейрон. Наклонът на тези криви в тройната точка е:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda + r}{T(v_n - v_n)} \rightarrow \text{крива } a;$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_t - v_n)} \rightarrow \text{крива } b;$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v_n - v_t)} \rightarrow \text{крива } c,$$

където v_n , v_t и v_n са съответно специфичните обеми на леда, течността и наситените водни пари, а T – температурата на тройната точка на водата. В първото уравнение е отчетено, че съгласно със закона за запазване на енергията специфичната топлина на сублимация е равна на сумата $\lambda + r$ от специфичните топлини на топене λ и на парообразуване r , определени също в тройната точка. От трите уравнения могат да се направят следните изводи:

1. Наклонът на кривата на сублимация a и на кривата на изпарение c е положителен ($dp/dT > 0$), защото водните пари имат по-малка плътност и по-голям специфичен обем от водата и от леда ($v_n > v_n$ и $v_n > v_t$). Наклонът на кривата a е по-голям, защото топлината на сублимация $\lambda + r$ е по-голяма от топлината на изпарение r ($v_n - v_t \approx v_n - v_n$).

2. Наклонът на кривата на топене b е отрицателен ($dp/dT < 0$), защото ледът има по-малка плътност и по-голям специфичен обем от водата ($v_n > v_t$). Затова при увеличаване на налягането температурата на топене на леда намалява. Веществата, чиито обем при топене нараства, имат положителен наклон на кривата на топене.

Ще отбележим, че поради отрицателния наклон на кривата на топене на леда например е възможно да се карат зимни кънки. Коефициентът на триене между стоманата и сухия лед е голям и пързалянето

би било силно затруднено. Натискът на кънката върху леда обаче води до увеличаване на налягането, при което ледът започва да се топи при по-ниска температура и се получава тънък течен слой, който значително намалява триенето.

Диаграми, подобни на показаната на *фиг.42-2*, се наричат *фазови диаграми* или *диаграми на състоянието*. С тяхна помощ могат да се проследят фазовите преходи, които се извършват във веществото при един или друг процес. Например с пунктир на *фиг.42-2* са показани два процеса на нагриване на леда при постоянно налягане. Ако налягането е по-голямо от налягането на наситените водни пари в тройната точка (изобарата 1 – 2), процесът е съпроводен с два фазови прехода: топене на леда, а след това изпарение на водата. Втората изобара 3 – 4, където налягането е по-ниско от налягането на наситените водни пари в тройната точка на водата A , описва процес само с един фазов преход – сублимация на леда.

Задачи

1. а) Като предположите, че атмосферата се намира при постоянна температура и че специфичната топлина на изпарение на водата r не зависи от температурата и от налягането, покажете, че температурата на кипене на водата се изменя с надморската височина h по

$$\text{закона } T = T_0 \left(1 - \frac{gh}{r} \right), \text{ където } T_0 = 373 \text{ К е тем-}$$

пературата на кипене на водата на морския бряг, т.е. при нормално атмосферно налягане.

б) Пресметнете температурата на кипене на водата на площад Ал. Невски ($h = 550 \text{ m}$). Специфичната топлина на изпарение на водата е $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$.

Указание. Използвайте барометричната формула (уравнение (34.11) на стр.186) и резултата от пример 42.1.

2. С помощта на фазовата диаграма от *фиг.42-2* проследете какви фазови преходи ще се извършат с чиста вода, намираща се в съд с постоянна температура -1°C при много голямо налягане, ако налягането започне бавно да намалява.

43. Повърхностно напрежение

Свободна повърхност

Молекулите на течностите са разположени много по-близо една до друга, отколкото при газовете, затова силите на привличане между тях играят съществена роля. Тъй като силите на привличане много бързо намаляват с разстоянието, взаимодействието между отдалечени молекули може да се пренебрегне. Приема се, че дадена молекула взаимодейства само с молекулите, намиращи се в сфера с център в избраната молекула и радиус r , наречен *радиус на молекулното действие*. Големината на радиуса на молекулното действие е от порядъка на няколко ефективни диаметра на молекулата. Когато една молекула се намира в обема на течността, разпределението на нейните съседи вътре в сферата на молекулно действие е равномерно (фиг.43-1). Затова резултантната сила, която действа на разглежданата молекула, е нула. Ситуацията се изменя, ако молекулата се намира в повърхностния слой на течността с дебелина r . Тогава броят на молекулите в долната част от сферата е по-голям и резултантната сила е насочена надолу, перпендикулярно на свободната повърхност. Следователно молекулите от повърхностния слой са подложени на действието на сили, насочени навътре към обема на течността. За да преминат молекули от обема на течността в повърхностния слой,

трябва да се извърши работа за преодоляване на тези сили, при което кинетичната енергия на молекулите намалява и се превръща в потенциална енергия. Тази допълнителна потенциална енергия на молекулите от повърхностния слой на течностите е част от вътрешната енергия на течността. Повърхността на течностите има точно определена форма. Тя наподобява опъната еластична ципа, която се стреми да се свие, т.е. да достигне състояние с минимална потенциална енергия. В отсъствие на външни сили течностите приемат сферична форма, на която отговаря минимална свободна повърхност (минимална потенциална енергия). Когато течността се намира в полето на силата на тежестта, нейната форма се определя от изискването за минимум на сумата от потенциалната енергия на свободната повърхност и гравитационната потенциална енергия.

Коефициент на повърхностно напрежение

Работата, необходима за създаване на единица свободна повърхност на течността чрез равновесен изотермен процес, без да се изменя обемът, се нарича коефициент на повърхностно напрежение σ или за по-кратко – *повърхностно напрежение*. От определението следва, че

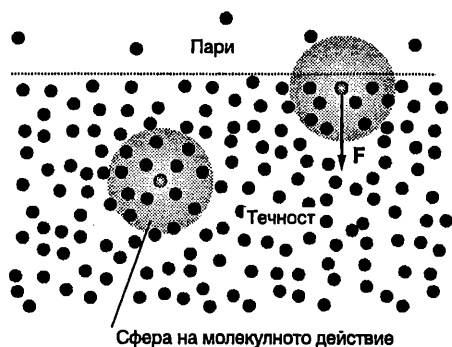
$$(43.1) \quad \sigma = \frac{\delta A}{dS},$$

където δA е работата, която трябва да извършат външните сили, за безкрайно малко увеличение dS на свободната повърхност на течността.

От формула (43.1) се вижда, че единицата за повърхностно напрежение е J/m^2 или N/m . Повърхностното напрежение σ зависи от вида на течността, от наличието на примеси, от температурата и др. В табл.43.1 са дадени коефициентите на повърхностно напрежение за някои вещества в течно състояние при различни температури.

Изискването за минимум на потенциалната енергия на свободната повърхност е причина химическият състав на повърхностния слой на разтворите да се различава от този в обема на течността. Дейст-

Фиг.43-1.



временно, минимум на потенциалната енергия може да се достигне не само чрез намаляване на свободната повърхност, но и посредством включване в повърхностния слой на такива молекули, които осигуряват минимална стойност на повърхностното напрежение σ . Вещества, чието адсорбиране в повърхностния слой на течностите води до намаляване на повърхностното напрежение, се наричат повърхностно активни вещества. Примери за повърхностно активни вещества са сапунът и различните перилни препарати, които намаляват повърхностното напрежение на водата около 1,5 пъти.

Таблица 43.1. Коефициенти на повърхностно напрежение за някои течности, които са в контакт с въздуха.

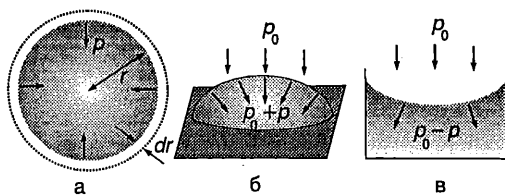
Течност	Повърхностно напрежение σ , N/m	Температура $^{\circ}\text{C}$
Етилов алкохол	$2,23 \cdot 10^{-2}$	20
Глицерин	$6,31 \cdot 10^{-2}$	20
Вода	$7,56 \cdot 10^{-2}$	0
	$7,28 \cdot 10^{-2}$	20
	$6,62 \cdot 10^{-2}$	60
	$5,89 \cdot 10^{-2}$	100
Живак	0,465	20
Сребро	0,80	970
Злато	1,0	1070

Формула на Лаплас

Да разгледаме сферична капка течност с радиус r . Нейната повърхност, подобно на разтегната еластична ципа, се стреми да се свие и оказва допълнително налягане p върху обема на течността (фиг.43-2а). Ще допуснем (мислено), че можем да увеличим радиуса на капката с dr . За целта трябва да се преодолеят силите на натиск, предизвикани от това налягане, т.е. да се извърши работа

$$\delta A = p dV = p d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 dr$$

за създаване на допълнителна свободна повърхност $dS = d(4\pi r^2) = 8\pi r dr$. От определението за повърхностно напрежение



Фиг.43-2.

следва, че

$$\sigma = \frac{\delta A}{dS} = \frac{pr}{2},$$

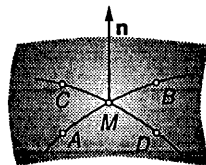
откъдето за допълнителното налягане се получава

$$(43.2) \quad p = \frac{2\sigma}{r}.$$

При изпъкнала повърхност силите на повърхностно напрежение се стремят да свият течността и затова налягането под повърхността е $p_0 + p$, т.е. то е по-голямо от външното налягане p_0 (фиг.43-2б). Обратно, при вдлъбната повърхност силите на повърхностно напрежение се стремят да разтегнат течността и нейното налягане е $p_0 - p$, т.е. налягането под повърхността на течността е по-малко от външното налягане (фиг.43-2в).

Френският математик и физик Пиер Симон Лаплас (1749–1827) обобщава формула (43.2) за допълнителното налягане p под изкривената повърхност на течност за случая, когато повърхността има произволна форма. Нека M е точка от повърхността, а $\mathbf{n}$ – единичният вектор на нормалата към повърхността, прекарана през тази точка. Прекарваме през нормалата две взаимно перпендикулярни равнини, чиито пресечници с повърхността са кривите AB и CD (фиг.43-3). Да означим с r_1 и r_2 радиусите на кривините на двете криви в пресечната им точка M . В диференциал-

Фиг.43-3.



ната геометрия се доказва (теорема на Ойлер), че сумата от реципрочните стойности на радиусите на кривините

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

е еднаква за всички двойки криви, получени по описания начин. Тази сума се нарича средна кривина на повърхността в точка M . Лаплас доказва, че допълнителното налягане под изкривена свободна повърхност на течност е правопропорционално на средната кривина на повърхността

$$(43.3) \quad p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Формула (43.2) за допълнителното налягане под сферична повърхност на течност се получава от формулата на Лаплас (43.3), след като се положи $r_1 = r_2 = r$.

Мокрене

Потенциалната енергия на повърхностния слой и коефициентът на повърхностно напрежение зависят не само от вида на течността, но и от средата, с която тя е в контакт – газ, друга течност или твърдо тяло. Всяка гранична повърхност притежава потенциална енергия и се характеризира с определен коефициент на повърхностно напрежение. Да разгледаме капка течност, поставена върху хоризонтална твърда повърхност. В случая има три гранични повърхности: твърдо тяло–течност, течност–въздух и твърдо тяло–въздух. Условието за механично равновесие на системата е сумата от потенциалната енергия на граничните повърхности и гравитационната потенциална енергия на течността да е минимална. Това условие определя и формата на капката течност. Ъгълът θ между допирателната към повърхността на твърдото тяло и допирателната към

повърхността на течността, отчитан навътре към течността, се нарича *ъгъл на мокрене* (фиг.43-4). Когато $\theta < 90^\circ$ (фиг.43-4а), течността се нарича *мокреца*. При $\theta = 0$ мокренето е пълно. В този случай е енергетически по-изгодно да съществува граничната повърхност твърдо тяло–течност, тъй като тя има най-малка потенциална енергия. Затова течността неограничено се разтича по твърдото тяло, стремейки се да покрие максимална площ.

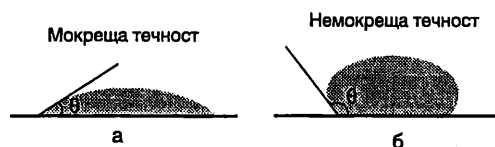
При ъгли на мокрене $\theta > 90^\circ$ (фиг.43-4б) течността се нарича *немокреца*. В този случай граничната повърхност твърдо тяло–течност притежава най-голяма потенциална енергия и системата се стреми да намали тази повърхност. При пълно немокрене ($\theta = 180^\circ$) граничната повърхност се свива в точка и течността се отделя от твърдото тяло.

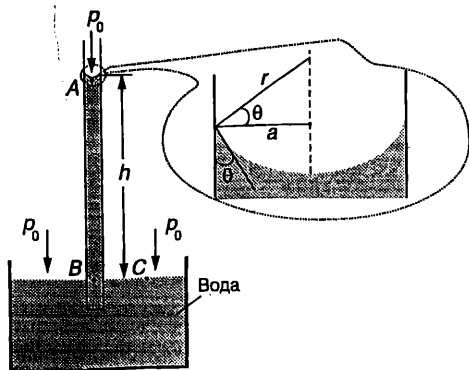
Немокренето води до някои странни на пръв поглед явления. Например намазани с мазнина игла или бръснарско ножче се задържат на повърхността на водата, тъй като поради немокренето пълното им потапяне във водата е свързано с увеличаване на повърхностната енергия, което не се компенсира от намаляването на потенциалната енергия mgh . По същата причина насекомите могат да се движат по водната повърхност без да потъват.

Капилярни явления

Изменението на равнището на течности в тесни тръбички или цепнатини, предизвикано от повърхностното напрежение, се нарича *капилярност*. В по-широк смисъл капилярните явления включват всички ефекти, свързани със съществуването на повърхностно напрежение. Да разгледаме широк съд с течност, в който е потопена тясна тръбичка (капилярка) с радиус a , която се мокри от течността. Ще използваме формулата на Лаплас, за да определим височината h , на която се издига течността в капилярката (фиг.43-5). Тъй като течността е мокреца (ъгълът на мокрене е $\theta < 90^\circ$), свободната ѝ повърхност е вдлъбната и в точка A (фиг.43-5), разположена непосредствено под повърхността, налягането е по-малко от външното атмосферно налягане p_0 . Налягането е $p_0 - p$,

Фиг.43-4.



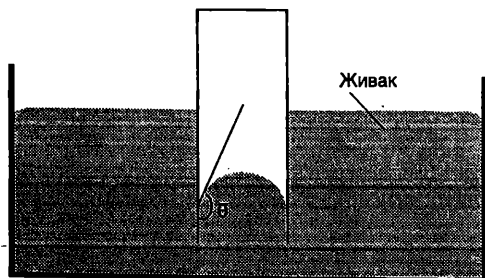


Фиг.43-5. Мокрещите течности се издигат по капилярните тръбички.

където допълнителното налягане p се определя по формулата на Лаплас. Съгласно със закона на Паскал налягането $p_0 - p$ се предава равномерно в обема на течността и налягането в точка В (фиг.43-5) е $(p_0 - p) + \rho gh$, където ρgh е хидростатичното налягане на стълба течност в капилярката. При определянето на хидростатичното налягане не е отчетено закриването на свободната повърхност, тъй като $h \gg a$. В точка С, която се намира непосредствено под плоската повърхност на течността, налягането е равно на външното налягане p_0 (допълнително налягане се създава само под изкривена повърхност). Тъй като точките В и С лежат на една и съща хоризонтална равнина, условието за механично равновесие изисква налягането в тези точки да е еднакво, т.е. $(p_0 - p) + \rho gh = p_0$, откъдето следва, че

$$(43.4) \quad p = \rho gh.$$

Фиг.43-6. В капилярката равнището на немокрещата течност е по-ниско, отколкото в широкия съд.



Огънатата повърхност (менискът) на течността може да се разглежда като част от

сферична повърхност с радиус $r = \frac{a}{\cos \theta}$

(фиг.43-5). Тогава от формула (43.2) за допълнителното налягане получаваме

$$(43.5) \quad p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\sigma \cos \theta}{a}.$$

Приравняваме десните страни на равенства (43.4) и (43.5) и определяме височина h , на която се издига мокреща течност в капилярка с радиус a

$$(43.6) \quad h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g a}.$$

Когато течността е немокреща (например живак), менискът е изпъкнал ($\cos \theta < 0$) и височината h е отрицателна, т.е. равнището на течността в капилярката е по-ниско от това в широкия съд (фиг.43-6). От формула (43.6) се вижда, че колкото по-малък е радиусът a на капилярката, толкова по-голяма е стойността на h .

Пример 43.1. Соковете на дърветата, които съдържат главно вода, се изкачват от корените до листата по мрежа от капиларки, чиито среден радиус е $a = 0,025 \text{ mm}$. На каква височина може да се издигне водата в такава капилярка, поради капиларния ефект?

Плътноста на водата е $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, коефициентът на повърхностно напрежение е $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$. Мокренето да се приеме за пълно ($\theta = 0$).

Решение. Търсената височина h определяме с помощта на формула (43.6), където полагаме $\cos \theta = 1$ (за $\theta = 0$)

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g a} \approx 0,6 \text{ m}.$$

Полученият резултат показва, че капиларността не може да е основният фактор, който определя движението на соковете към листата на дърветата, тъй като височината на отделни видове дървета достига десетки метри. Изследванията показват, че вероятно причината е в силите на сцепление между молекулите на течностите – течностите оказват съпротивление на опитите да бъдат разкъсани. За еднородни течности силите на сцепление достигат няколко нютона на квадратен милиметър. Да разгледаме тясна тръбичка от дървесната

тъкан, която изцяло е запълнена с течност, достигаща до листата. В листата водата се изпарява. Силите на сцепление не позволяват да се разкъса стълбът течност и го изтеглят нагоре, така че да се запълни мястото на изпарената вода. Силите на сцепление са толкова големи, че могат да издигнат воден стълб с височина десетки, дори стотици метри.

Пример 43.2. Между две хоризонтално разположени стъклени пластинки е поставена капка живак с обем $V = 50 \text{ mm}^3$. С каква сила F трябва да се притискат една към друга пластинките, за да се установи между тях разстояние $d = 5 \text{ mm}$? Немокренето да се смята за пълно. Коефициентът на повърхностно напрежение на живака е $\sigma = 0,5 \text{ N/m}$.

Решение. Свободната повърхност на живака, която не е в контакт с двете пластинки, е изкривена. Тя се характеризира с два радиуса на кривината (фиг.43-7): r_1 и r_2 . Тъй като немокренето е пълно ($\theta = 180^\circ$), $r_2 = d/2$. Допълнителното налягане под изкривената повърхност на живака се определя по формулата на Лаплас (43.3)

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\sigma}{r_2} = \frac{2\sigma}{d},$$

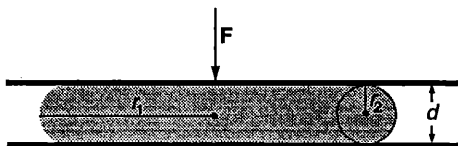
където сме отчели, че $r_1 \gg r_2$. От закона на Паскал следва, че налягането е еднакво в целия обем на течността (в случая хидростатичното налягане е пренебрежимо малко). Следователно налягането

$$p_1 = \frac{F}{S} = \frac{F}{(V/d)} = \frac{Fd}{V},$$

което създават силите на натиск, с които пластинките действат на плоските повърхности на живака, трябва да е равно на допълнителното налягане p под изкривената повърхност. Приравняваме десните страни на уравненията за p и p_1 и определяме силата F

$$F = \frac{2V\sigma}{d^2} = \frac{2(50 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3)(0,5 \text{ N/m})}{(5 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2} = 2 \text{ kN}.$$

Фиг.43-7.



1. Определете с колко паскала налягането на въздух в сапунено мехурче с радиус $r = 1 \text{ mm}$ е по-голямо от външното атмосферно налягане. Коефициентът на повърхностно напрежение на сапунената вода е $0,045 \text{ N/m}$.

Указание. Не забравяйте, че сапунената ципа има две свободни повърхности!

2. Определете налягането в мехурче въздух с радиус $r = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, което се намира на дълбочина $h = 6 \text{ m}$ под повърхността на езеро. Плътността на водата е $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, коефициентът на повърхностно напрежение е $\sigma = 0,075 \text{ N/m}$. Атмосферното налягане е $p_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

3. Както е известно от хидростатиката, равнището на еднородна течност в скачени съдове е еднакво. Капиллярните ефекти обаче могат да доведат до това, че равнищата на течността при механично равновесие да са различни. Определете разликата във височините на стълбовете живак в две свързани вертикални капиллярки с радиуси $a_1 = 1 \text{ mm}$ и $a_2 = 0,4 \text{ mm}$. Живакът има плътност $\rho = 13 \,600 \text{ kg/m}^3$, коефициент на повърхностно напрежение $\sigma = 0,5 \text{ N/m}$ и ъгъл на мокрене $\theta = 140^\circ$.

4. От вертикална тръбичка с вътрешен радиус $a = 2 \text{ mm}$ на капки изтича спирт. За колко секунди ще изтече 2 g спирт, ако капките се откъсват през интервал от една секунда? Диаметърът на шийката на капката в момента на нейното откъсване да се приеме за равен на вътрешния диаметър на тръбичката. Коефициентът на повърхностно напрежение на спирта е $\sigma = 0,02 \text{ N/m}$.

Указание. Върху сечението S на шийката на капката действат две сили: теглото mg на капката и силата на натиск pS , породена от допълнителното налягане под изкривената повърхност на течността. Приемете, че $p = 2\sigma/a$. Капката се откъсва при $mg = pS$.

5. Две вертикални, неподвижни една на друга стъклени пластинки, са потопени във вода. Дължината на пластинките е $\ell = 10 \text{ cm}$, а разстоянието между тях е $d = 0,4 \text{ mm}$. Определете:

а) Височината h , на която ще се издигне водата между пластинките.

б) Големината на силата F , с която пластинките се привличат една към друга.

Плътността на водата е $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, коефициентът на повърхностно напрежение е $\sigma = 0,075 \text{ N/m}$. Мокренето да се приеме за пълно.

Указание. Свободната повърхност на водата между двете пластинки има цилиндрична форма. Използвайте формулата на Лаплас, като положите $r_1 = \infty$ и $r_2 = d/2$.

Отговори на задачите

Глава 1. Кинематика

- 1.1. а) $v = 14 \text{ m/s}$, $a = 12 \text{ m/s}^2$; б) 11 m/s .
1.2. а) 2 m ; б) $v = -4 \text{ m/s}$, $a = -18 \text{ m/s}^2$;
в) $x_{\text{max}} = 4,5 \text{ m}$.
1.4. 55 m .
1.5. 72 m .
1.6. $\Delta x = 5 \text{ m}$, $\Delta S = 27 \text{ m}$.
1.7. 3 m .
1.8. 12 m/s^2 ; 300 m .
1.9. $1,3 \text{ m/s}^2$.
1.10. $6,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$.
1.11. 60 m .
1.12. 450 m .
1.13. $82,5 \text{ m}$.
1.14. 120 m .
2.1. 5 m/s .
2.2. $24,7 \text{ m}$.
2.3. $v = 5 \text{ m/s}$, $a = 2 \text{ m/s}^2$.
2.4. 10 m/s^2 .
2.5. 28 m .
2.6. 135° .
2.7. $r = r_0 + v_0 t + g t^2 / 2$.
2.8. $22,5 \text{ m}$.
2.9. $r(x) = \frac{(v_0^4 + g^2 x^2)^{3/2}}{g v_0^4}$; $r = 113 \text{ m}$.
2.10. $\text{tg} \alpha = \sqrt{2}$.
2.11. $v = \sqrt{\frac{a(1+b^2)}{2c}}$.
3.1. $3,14 \text{ rad/s}$; 1 m/s^2 .
3.2. а) $0,034 \text{ m/s}^2$; б) нула.
3.3. $3,5 \text{ rad/s}$.
3.4. $1,3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$.
3.5. $a_t = 0,1 \text{ m/s}^2$, $a_n = 0,4 \text{ m/s}^2$, $a = 0,41 \text{ m/s}^2$.
3.6. 1 m/s .
3.7. $0,98 \text{ s}$, $0,14 \text{ m/s}^2$.
3.8. $x(t) = r \sin\left(\frac{v}{r} t\right)$; $y(t) = r \cos\left(\frac{v}{r} t\right)$.

Глава 2. Динамика на материална точка

- 4.4. 29 m/s^2 .
4.5. 1 N .
4.6. $1,2 \text{ kN}$.
4.7. $F = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. Силата е насочена под ъгъл $\alpha = -76^\circ$ спрямо положителната посока на оста x .
4.8. $52,5 \text{ N} \cdot \text{s}$, $262,5 \text{ m/s}$.
4.9. б) 78 m/s .
5.1. 10 cm .
5.2. $2,2 \cdot 10^{20} \text{ N}$.
5.3. $g_n = 4g = 39 \text{ m/s}^2$.
5.4. а) $g_n = \frac{4}{3} \pi \gamma \rho R$; б) $3,5 \text{ N}$.
5.5. $\rho = \frac{3}{4} \frac{g}{\gamma \pi R_3}$.
5.6. $123\,000 \text{ km}$.
5.7. $F = \sqrt{3} \frac{\gamma m^2}{a^2}$.
5.8. $F = \frac{41}{450} \frac{\gamma m M}{R^2}$.
5.9. $k = \frac{F - m g \sin \alpha}{m g \cos \alpha}$.
5.10. $a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$.
5.11. $k = \frac{\text{tg} \alpha}{3}$.
5.12. а) $a = \frac{F}{m}(\cos \alpha + k \sin \alpha) + g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$;
б) $7,6 \text{ m/s}^2$.
5.13. а) $a = \frac{F}{m}(\cos \alpha - k \sin \alpha) - g(\sin \alpha + k \cos \alpha)$;
б) $2,8 \text{ m/s}^2$.
5.14. $v_{\text{max}} = \sqrt{mg(\sin \alpha - k \cos \alpha) / c} = 24 \text{ m/s}$.
6.2. $a = g \text{tg} \alpha = g$.
6.3. $f_c = m a_0$.
6.4. $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 0,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
6.5. $k = \frac{a_0 + g \text{tg} \alpha}{g - a_0 \text{tg} \alpha} \approx 0,97$.

6.6. Народе; $s = \frac{gt^2}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha) = 1,8 \text{ m}$.

6.7. а) $F_c = 2m\omega v_r$; $F_\theta = m\omega^2 r$;
 $F_n = \sqrt{F_c^2 + F_\theta^2} = m\omega\sqrt{\omega^2 r^2 + 4v_r^2}$.

б) $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_n$.

7.1. а) $\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2} R_3 = 0,033 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

б) $\Delta g \approx \frac{2\pi^2}{T^2} R_3 = 0,017 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

7.2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 11 \text{ s}$.

7.3. $\omega = g^{\frac{1}{2}} \left((L+r)^2 - (r+R)^2 \right)^{-\frac{1}{4}}$.

7.4. а) $P = m \left(g - \frac{v^2}{r} \right) = 7,3 \cdot 10^4 \text{ N}$;

б) $P = m \left(g + \frac{v^2}{r} \right) = 1,3 \cdot 10^5 \text{ N}$.

7.5. $\Delta x \approx \frac{2\pi s^2}{v_r T} \sin\theta \approx 86 \text{ m}$.

8.1. а) 5 J; б) 0; в) -5 J; г) -10 J.

8.2. а) -2 J; б) -1 J.

8.3. 0,4 m/s.

8.4. 150 J.

8.5. 30 N.

8.6. $A = \frac{aF_0(e-1)}{e} \approx 4 \text{ N}$.

8.7. $|P|_{\max} = \frac{mv_0^2 \sqrt{cg}}{2}$.

8.8. $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Fr}{m}}$.

9.1. -3 J.

9.2. -2,5 kJ.

9.3. а) $W(x) = \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3$; б) 6,34 m.

9.4. $W(x, y) = -\frac{c_1}{2}x^2 - \frac{c_2}{2}y^2$.

Глава 3. Закони за запазване в механиката

10.3. -v.

10.4. 2 m/s.

10.5. $\mathbf{u} = -\frac{m}{M} \mathbf{v}_1$.

10.6. $u = \frac{m}{M-m} v_1 \cos\alpha$.

10.7. $0,646 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

10.8. $x_c = 6,4 \text{ cm}$; $y_c = 5,9 \text{ cm}$.

10.9. б) 8 cm и 2 cm.

10.10. 1 m, на север.

10.11. 57 km/h.

10.12. $\mathbf{u} = -\frac{m}{M+m} \mathbf{v}$.

10.13. а) $m_0/m = 2,7$; б) $m_0/m = 7,4$.

10.14. $F = \mu v = 90 \text{ N}$.

10.15. $a = \frac{F}{m_b - \mu t} - g$; $v = \frac{F}{\mu} \ln \left(1 - \frac{\mu t}{m_b} \right) - gt$.

11.2. а) Скоростите на двете топчета са равни.

б) Долното топче ще измине разстоянието за по-малко време, защото във вдлъбнатината скоростта му е по-голяма от скоростта на другото топче при движението му по издатината.

11.3. $h = v_0^2/4g$.

11.4. $h = 3v^2/2g$.

11.5. $L = \frac{m}{M+m} v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5 \text{ m}$.

11.6. $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0$; $\tan\alpha = -\sqrt{3}$; $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, където α и β са ъглите, които скоростите съответно на първата и на втората частица сключват с положителната посока на оста x .

11.7. 10 km/s.

11.8. 3,1 km/s.

11.9. $R_{\text{tp}} = \frac{2\gamma M}{c^2} = 3 \text{ km}$.

13.1. $F_{\max} = 900 \text{ N}$.

13.2. $\mathbf{p} = 3p_0(\mathbf{i} + \mathbf{j})$. Новата частица се движи под ъгъл 45° спрямо координатната ос x (спрямо единичния вектор $\mathbf{i}$).

13.3. а) $\frac{E_{\text{кл}}}{E_{\text{ю}}} = \frac{121}{169} \approx 0,72$; б) след 41 удара.

13.4. а) $u = \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 = 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; б) 3,5 m/s; в) 1,25 J.

14.1. $M_1 = 3,54 \text{ N}\cdot\text{m}$; $M_2 = 2 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_3 = 0$;
 $M_4 = -6 \text{ N}\cdot\text{m}$.

14.2. а) 0° или 180° ; б) 90° .

14.3. $L = 3mvd/2$.

$$14.4. L = \frac{2\pi}{T} m R_3^2 = 2,4 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}.$$

$$14.5. \text{a) } M_x = 0, M_y = 2c_2 t; \text{ б) } M = 2\sqrt{c_1 c_2}.$$

$$14.6. v_0 = h \sqrt{\frac{2g}{h_0 + h}}; \quad v = h_0 \sqrt{\frac{2g}{h_0 + h}}.$$

Глава 4. Механика на твърдо тяло

15.1. а) нула; б) 810 N·m и нула; в) 810 N·m и -1125 N·m; г) 405 N·m и -1125 N·m.

$$15.2. 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$15.3. 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$15.4. M(t) = 2I(c_2 + 3c_3 t).$$

$$15.5. \text{a) } M_z = 0,47 \text{ N} \cdot \text{m}; \text{ б) } \varepsilon = 4,7 \text{ rad/s}^2.$$

$$15.6. a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}} = 2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad T = 14,7 \text{ N}.$$

$$15.7. \varepsilon = 2,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$15.8. I = 3mR^2, \quad M_f = \frac{1}{5} mgR.$$

$$15.9. I = \frac{R^2}{a} ((m_2 - m_1 \sin \alpha)g - (m_1 + m_2)a);$$

$$I \approx 0,026 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$T_1 = m_1(a + g \sin \alpha) = 10,5 \text{ N}; \quad T_2 = m_2(g - a) = 16 \text{ N}.$$

$$16.1. 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$16.2. \text{a) } I'_z = \frac{3}{2} mR^2; \text{ б) } I'_z = \frac{1}{3} mL^2; \text{ в) } I'_z = \frac{5}{3} mR^2.$$

$$16.5. I_x = \frac{1}{12} mb^2; \quad I_y = \frac{1}{12} ma^2; \quad I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

$$16.6. \frac{1}{12} ma^2.$$

$$17.1. \text{a) } 40 \text{ rad/s}; \text{ б) } v_A = 0, v_B = 4 \text{ m/s};$$

$$\text{в) } E_k = \frac{3}{4} mv_C^2 = 6 \text{ J}.$$

$$17.2. v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 5,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$17.3. 2,4 \text{ kJ}.$$

$$17.4. 2,6 \cdot 10^{29} \text{ J}.$$

$$17.5. a = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

$$17.6. v_C = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

$$17.7. \cos \alpha = 10/17; \quad \alpha = 54^\circ.$$

$$17.8. F_x = \frac{3}{2} mg; \quad F_y = \frac{1}{4} mg.$$

$$17.9. \omega = 2\sqrt{\frac{g}{3R}}; \quad a_x = -\frac{4}{3}g; \quad a_y = -\frac{2}{3}g.$$

$$18.1. 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s};$$

$$18.2. L = \frac{m\omega R^2}{4} \sqrt{1 + 3\sin^2 \theta}.$$

$$18.3. L = \frac{m\omega R^2}{4} \sqrt{4 + \left(\frac{h^4}{9R^4} + \frac{2h^2}{3R^2} - 3 \right) \sin^2 \alpha};$$

$$\text{tg} \theta = \frac{3R^2 + h^2}{6R^2} \text{tg} \alpha;$$

$$E_k = \frac{m\omega^2 R^2}{8} \left(1 + \cos^2 \alpha + \frac{h^2}{3R^2} \sin^2 \alpha \right).$$

$$18.4. E_k = \frac{m\omega_0^2}{8} (6d^2 + R^2).$$

$$18.5. \text{a) } \omega_1 = \omega \sin \alpha; \quad \omega_2 = \omega \sqrt{1 + 3\sin \alpha};$$

$$\text{б) } \text{tg} \theta = \frac{\cot \alpha}{2}.$$

$$19.1. k > \frac{gd^3 \sin \theta}{\omega^2 \rho^4} = 0,03.$$

$$19.2. \omega = \frac{2(g+a)d}{r^2 \Omega}.$$

Глава 5. Еластични свойства на телата

$$20.1. \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{mg}{2ES}.$$

$$20.2. W = \frac{m^2 a^2 \ell}{6ES}.$$

$$21.1. \Delta V = -2,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = -2,6 \text{ cm}^3.$$

$$21.2. 3,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}.$$

$$21.3. \sigma_r = \frac{4F}{\pi d^2} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Pa};$$

$$6) \theta = \frac{\sigma_r}{G} = 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}; \text{ в) } W = 0,05 \text{ J}.$$

$$21.4. \frac{\Delta V}{V} = -3\rho \left(\frac{3}{E} - \frac{1}{G} \right).$$

$$21.5. E' = \frac{G}{3} \left(4 + \frac{E}{3G - E} \right).$$

$$22.1. R = \frac{EI_n}{Fa}.$$

$$22.2. y_0 = \frac{Fl^3}{3EI_n}.$$

$$22.3. y_0 = \frac{5mg\ell^3}{32Ea^3b}.$$

$$23.2. \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{1}{3}.$$

$$23.3. 24 \text{ cm}.$$

$$23.4. 8,75 \text{ m}.$$

$$23.5. \frac{\ell_2}{\ell_1} = 3^{\frac{2}{3}} \approx 2,1.$$

23.6. $Q \propto m^{\frac{5}{8}}$. Тъй като топлинните загуби нарастват по-бавно с увеличаване масата m на бозайника, отколкото отделената при метаболизма енергия (вж. закона на Клайбер), то относителният дял на топлинните загуби при едрите животни ще бъде по-малък.

$$23.7. \text{ а) } \varphi \propto \frac{1}{r^{10/3}}; \text{ по-устойчиви са костите на}$$

възрастните; б) $\varphi \propto r^{1/3}$ – на децата.

Глава 6. Механика на флуидите

$$24.1. 3,3 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

$$24.2. \Delta p = 17,7 \text{ kPa} = 133 \text{ mmHg}.$$

$$24.3. 0,5 \text{ m}.$$

$$24.4. p = \rho(g + a)h.$$

$$24.5. 750 \text{ kg/m}^3.$$

24.6. Не. От условието за плаване на телата следва, че получената след разтапянето на леда вода има обем, равен на обема на пото-

пената част на парчето лед.

$$24.7. 1100 \text{ kg/m}^3.$$

24.8. Везните ще се наклонят към теглилка с по-малък обем.

$$24.9. 1110 \text{ kg/m}^3.$$

$$24.10. \text{ а) } P_1 = P + \rho_2 gV; \text{ б) } P_1 = P + \rho_2 gV;$$

$$\text{ в) } P_1 = P + \rho_1 gV.$$

$$24.11. \rho(r) = \frac{\rho g_0}{2R} (R^2 - r^2).$$

$$25.5. 9 \text{ m/s}.$$

$$25.6. v/2.$$

$$25.7. 0,36 \text{ l}.$$

$$25.8. 56 \text{ l/s}.$$

$$25.9. v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1(1 - (S_2/S_1)^2)}} \approx \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}}.$$

$$25.10. d = \frac{d_1}{\sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2 g L d_1^4}{8Q^2}}} = 0,008 \text{ m}.$$

$$25.11. \text{ а) } t = (\sqrt{2} - 1) \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{H}{g}}; \text{ б) } T = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

$$25.12. \text{ а) } \omega = \frac{\sqrt{2gh}}{r}; \text{ б) } \omega_1 = \frac{\sqrt{v^2 + 2gh}}{r}.$$

$$26.1. \text{ а) } 5 \cdot 10^{-3} \text{ N}; \text{ б) } 5 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

26.2. Ще намалее 4 пъти.

$$26.3. \Delta p = 3,7 \text{ Pa}.$$

$$26.4. 2t.$$

$$26.5. t = \frac{32\eta\ell}{\rho g d^2 \sin\alpha}.$$

$$27.1. 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}.$$

$$27.2. v_2 = v_1 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = 3,5 \text{ m/s}.$$

$$27.3. 150 \text{ m/s}.$$

$$27.4. \text{ а) } v_2 = v_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{6}} = 112 \text{ м/с};$$

$$\text{б) } v_2 = v_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{10}} = 8,1 \text{ м/с}.$$

$$27.5. P_1 = P \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{7}{2}} = 0,088P.$$

Глава 7. Идеалният газ като най-проста термодинамична система

$$29.4. 7,4 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

$$29.5. 2,7 \cdot 10^{19} \text{ молекули}.$$

$$29.6. 120 \text{ молекули}.$$

$$29.7. \Delta N = \frac{p \Delta V \Delta T}{RT^2} N_A = 2 \cdot 10^{25} \text{ молекули}.$$

$$29.8. 72 \text{ г}.$$

$$29.9. p(\text{N}_2) = 0,78 \text{ atm} = 7,8 \cdot 10^4 \text{ Па};$$

$$p(\text{O}_2) = 0,21 \text{ atm} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ Па}; p(\text{Ar}) = 0,009 \text{ atm} = 0,09 \cdot 10^4 \text{ Па}; p(\text{CO}_2) = 0,0004 \text{ atm} = 40 \text{ Па}.$$

$$29.10. 29 \text{ м}.$$

$$29.11. 0,35 \text{ mol кислород в } 1 \text{ mol въздух}.$$

$$29.12. 150 \text{ К}.$$

$$29.13. T_{\max} = \frac{2p_0}{3R} \sqrt{\frac{p_0}{3c}}.$$

$$30.1. \text{ а) } 3 \text{ кJ}; \text{ б) } 2,7 \text{ кJ}.$$

$$30.2. 3p_0 V_0 / 2.$$

$$30.3. 100 \text{ кJ}.$$

$$30.4. 416 \text{ кJ}.$$

$$30.5. -200 \text{ J}.$$

$$30.6. \text{ а) } 1,5 \text{ MJ}; \text{ б) } 2,5 \text{ MJ}.$$

$$30.7. A = \frac{k-1}{k} \frac{m}{M} RT_0.$$

$$30.8. A = nR(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2.$$

$$30.9. A = nRT((k-1) - \ln k).$$

$$30.10. M = \frac{mR\Delta T}{A} = 0,032 \text{ kg/mol}.$$

$$30.11. 25\%.$$

$$30.12. 18 \text{ дни}.$$

$$30.13. 650 \text{ l}.$$

$$30.15. 247 \text{ кJ/mol}.$$

$$30.16. 111 \text{ кJ/mol}.$$

$$30.17. P = p_1 V_0 \frac{p_0 T}{p T_0} \frac{1}{t} \approx 6 \text{ W}.$$

$$31.1. 2,1 \text{ кJ}.$$

$$31.2. 3,7 \text{ кJ}.$$

$$31.3. \text{ а) } 1,3; \text{ б) } 2,5 \text{ кJ}; \text{ в) } 0,83 \text{ кJ}.$$

$$31.5. \text{ а) } 15 \text{ кJ}; \text{ б) } 10 \text{ кJ}; \text{ в) } 25 \text{ кJ}.$$

$$31.6. 624 \text{ К}.$$

$$31.7. 193 \text{ К}.$$

$$31.8. A = nC_V T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{R}{C_V}} \right] = 2,8 \text{ кJ}.$$

Глава 8. Молекулно-кинетична теория на идеалния газ

$$32.1. \text{ Нараснало е } 2 \text{ пъти}.$$

$$32.2. 3,75 \cdot 10^{13} \text{ молекули}.$$

$$32.4. \text{ а) } 1,2 \cdot 10^{-19} \text{ J}; \text{ б) от } 0,79 \text{ km/s до } 12,2 \text{ km/s}.$$

$$32.5. 600 \text{ К}.$$

$$32.6. 100 \text{ К}.$$

$$32.7. \bar{v}_{\text{кв.}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$33.1. 3,1 \text{ кJ}.$$

$$33.2. \text{ а) } 1,25 \text{ кJ}; \text{ б) } 2,08 \text{ кJ}; \text{ в) } 0,83 \text{ кJ}.$$

$$33.3. 215 \text{ кJ}.$$

$$34.1. 1200 \text{ К}.$$

$$34.2. \pi/4.$$

$$34.3. T = \frac{M\Delta v^2}{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = 24 \text{ К}.$$

$$34.4. 507 \text{ К}.$$

$$34.5. T = \frac{M(v_2^2 - v_1^2)}{4R \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} = 62,5 \text{ K.}$$

$$34.6. n_{V1}/n_{V0} = 0,42.$$

$$34.7. h = \frac{RT}{Mg} \ln 2 = 5,5 \text{ km.}$$

35.1. а) 0,1 μm ; б) $4,5 \cdot 10^9$ удара; в) около 30 пъти (Средното разстояние между молекулите е

$a_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{n_V}}$, където n_V е концентрацията на молекулите.)

35.2. а) Намалжава 2 пъти; б) не се изменя.

$$35.3. \frac{d_{Ar}}{d_{He}} = \sqrt{\frac{\kappa_{He}}{\kappa_{Ar}}} \sqrt{\frac{M_{He}}{M_{Ar}}} = 1,7.$$

$$35.4. \frac{\eta_2}{\eta_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = 0,87, \text{ където с индекс 1 са}$$

означени вискозитетът и обемът на газа в началното състояние, а с индекс 2 – в крайното състояние.

$$35.5. \frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{3-\gamma}{2}} = 0,4, \text{ където с индекс 1 са}$$

означени коефициентът на дифузия и обемът на газа в началното състояние, а с индекс 2 – в крайното състояние.

Глава 9. Втори принцип на термодинамиката

$$36.1. 6,7\%.$$

$$36.2. 10 \text{ MW.}$$

$$36.3. 7,7^\circ\text{C.}$$

$$36.4. 2 \cdot 10^4 \text{ m}^2.$$

$$36.5. \eta = 1 - \gamma \frac{\alpha^\gamma - 1}{\alpha - 1}.$$

$$36.6. \eta = 1 - \frac{\beta^\gamma - 1}{\gamma(\beta - 1)\epsilon^{\gamma-1}}.$$

$$37.1. 200 \text{ K.}$$

$$37.2. 10 \text{ J/K.}$$

37.3. Цикъл на Карно.

$$37.4. \Delta S = nR \ln 2.$$

$$37.5. 17,3 \text{ J/K.}$$

$$37.6. -70,6 \text{ J/K.}$$

$$37.7. -28,8 \text{ J/K.}$$

$$37.8. -77,7 \text{ J/K.}$$

$$37.9. \Delta S = (i+1)nR \ln 2 = 46 \text{ J/K.}$$

Глава 10. Реални газове и течности

$$41.1. 0,82 \text{ kg}$$

$$41.2. 47 \%.$$

$$41.3. -857 \text{ J/K.}$$

$$41.4. \text{ а) } 7,5\%; \text{ б) } A = \frac{\eta \lambda m}{1 - \eta} = 2,7 \cdot 10^{14} \text{ J.}$$

$$43.1. 180 \text{ Pa.}$$

$$43.2. 1,96 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$43.3. 8,6 \text{ mm.}$$

$$43.4. 78 \text{ s.}$$

$$43.5. \text{ а) } h = \frac{2\sigma}{\rho g d} = 4 \text{ cm; б) } F = \frac{2\sigma^2 \ell}{\rho g d^2} = 0,7 \text{ N.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Математика

Степени

$$(A.1) \quad x^m x^n = x^{m+n}.$$

Пример: $2^2 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$

$$(A.2) \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}.$$

Пример: $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27.$

$$(A.3) \quad \frac{1}{x^m} = \sqrt[m]{x}.$$

Пример: $\frac{1}{64^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{64} = 4.$

$$(A.4) \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

Пример: $(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 = 4096.$

Формули за съкратено умножение

$$(A.5) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(A.6) \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(A.7) \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

$$(A.8) \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(A.9) \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Квадратно уравнение

Общият вид на квадратно уравнение с едно неизвестно x е

$$(A.10) \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

където константите a , b и c се наричат коефициенти на уравнението.

Уравнение (A.10) има два корена

$$(A.11) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Пример. Намерете корените на квадратното уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Решение. В случая: $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$. Корените на това квадратно уравнение са:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = 2;$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Линейна функция

Ако две променливи величини x и y са свързани със зависимостта

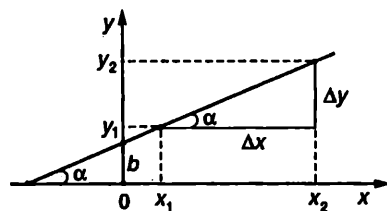
$$(A.12) \quad y = ax + b,$$

където a и b са константи, казва се, че величината y е линейна функция на величината x . При решаването на физични задачи, когато искаме да подчертаем, че стойностите на величината y трябва да се пресметнат по зададени стойности на величината x , наричаме променливата x *независима променлива* или *аргумент*, а величината y – *зависима променлива* или *функция*. Графично линейната функция се представя с права линия (Внимание! По абсцисната ос винаги се нанасят стойностите на аргумента, а по ординатната ос – стойностите на функцията.) Константата b е равна на y -координатата на точката, в която правата линия пресича ординатната ос (фиг.А-1), а константата a се определя графично по наклона на правата линия (фиг.А-1)

$$(A.13) \quad a = \text{Наклон} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

където α е ъгълът, който правата линия сключва с положителната посока на оста x .

Фиг.А-1.



Логаритми

Логаритъм на числото x при основа a се нарича показателят на степента y , на която трябва да се повдигне a , за да се получи числото x

$$(A.14) \quad x = a^y;$$

$$(A.15) \quad y = \log_a x.$$

Във физиката най-често се използват т.нар. *натурални логаритми*, чиято основа е ирационалното число $e = 2,718\ldots$. Вместо с $\log_e x$ натуралните логаритми е прието да се означават с $\ln x$:

$$(A.16) \quad y = \ln x \quad (\text{или } x = e^y).$$

Основните свойства на логаритмите (независимо от това, каква е тяхната основа) са:

$$(A.17) \quad \log(ab) = \log a + \log b;$$

$$(A.18) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b;$$

$$(A.19) \quad \log a^m = m \log a.$$

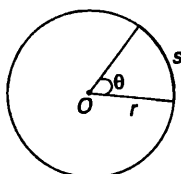
За натуралните логаритми:

$$(A.20) \quad \ln e = 1;$$

$$(A.21) \quad \ln e^x = x.$$

Геометрия

Радан. На *фиг.А-2* е показан централен ъгъл θ , който отсича от окръжност с радиус r дъга с дължина s . Отношението s/r не зависи от радиуса на окръжността и служи за мярка на ъгъла θ (в радиани)



Фиг.А-2.

$$(A.22) \quad \theta = \frac{s}{r}.$$

Раданната мярка на ъгъл θ , който е зададен в градуси, се определя по формулата

$$(A.23) \quad \theta(\text{в радиани}) = \theta(\text{в градуси}) \frac{\pi}{180}.$$

Пример. Пресметнете раданната мярка на ъгъл $\theta = 50^\circ$.

$$\text{Решение. } \theta = 50 \frac{3,14}{180} = 0,87 \text{ rad.}$$

Питагорова теорема: Във всеки правоъгълен триъгълник квадрата на хипотенузата c е равен на сумата от квадратите на двата катета a и b

$$(A.24) \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Полезни формули

Окръжност, кръг, сфера и кълбо с радиус r :

$$(A.25) \quad \text{Дължина на окръжност} = 2\pi r;$$

$$(A.26) \quad \text{Площ на кръг} = \pi r^2;$$

$$(A.27) \quad \text{Площ на сфера} = 4\pi r^2;$$

$$(A.28) \quad \text{Обем на кълбо} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Тригонометрия

Тригонометрични функции на острите ъгли в правоъгълен триъгълник (*фиг.А-3*)

$$(A.29) \quad \sin \alpha = \frac{\text{срещулежащ на } \alpha \text{ катет}}{\text{хипотенуза}} = \frac{a}{c};$$

$$(A.30) \quad \cos \alpha = \frac{\text{прилежащ на } \alpha \text{ катет}}{\text{хипотенуза}} = \frac{b}{c};$$

$$(A.31) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{срещулежащ на } \alpha \text{ катет}}{\text{прилежащ на } \alpha \text{ катет}} = \frac{a}{b};$$

$$(A.32) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$(A.33) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$(A.34) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

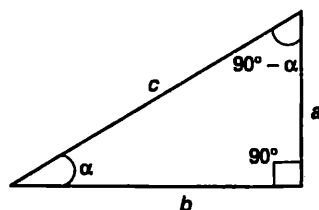
$$(A.35) \quad \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha);$$

$$(A.36) \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha);$$

$$(A.37) \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$(A.38) \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Фиг.А-3.



Съотношения между страни и ъгли в произволен триъгълник (фиг. А-4).

Косинусова теорема:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \\ (A.39) \quad b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Синусова теорема:

$$(A.40) \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Някои тригонометрични тъждества

$$(A.41) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$(A.42) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$(A.43) \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$(A.44) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$(A.45) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$(A.46) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$(A.47) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

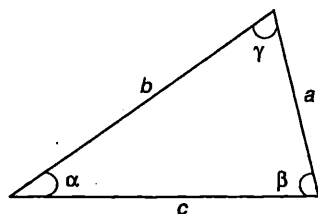
$$(A.48) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$(A.49) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$(A.50) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$(A.51) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Фиг. А-4.



Развиване на някои функции в степенни редове

$$(A.52) \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots;$$

$$(A.53) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots;$$

$$(A.54) \quad \ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \dots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (x \text{ в радиани})$$

$$(A.55) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (x \text{ в радиани})$$

Когато $x \ll 1$, използват се следните приближения:

$$(A.56) \quad (1+x)^n \approx 1 + nx;$$

$$(A.57) \quad e^x \approx 1 + x;$$

$$(A.58) \quad \ln(1 \pm x) \approx \pm x;$$

$$(A.59) \quad \sin x \approx x; \quad \cos x \approx 1.$$

Производна на функция

Границата на отношението на нарастването на една функция Δy към съответното нарастване на нейния аргумент Δx , когато Δx клони към нула, се нарича (първа) производна на функцията $y(x)$ и се означава с dy/dx

$$(A.60) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Производната на първата производна се нарича **втора производна**

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Производна на сума (разлика) от две функции $f(x) = u(x) \pm v(x)$

$$(A.61) \quad \frac{df(x)}{dt} = \frac{du}{dt} \pm \frac{dv}{dt}.$$

Производна на произведение от две функции $f(x) = u(x)v(x)$

$$(A.62) \quad \frac{d}{dx} f(x) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Производна на частно от две функции $f(x)$ и $v(x)$
 $= u(x)/v(x)$ (A.74)

$$(A.63) \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Производна на функция от функция.
 Нека $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогава производната dy/dx е

$$(A.64) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Производни на някои функции (x – променлива, a и n – константи)

$$(A.65) \quad \frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1};$$

$$(A.66) \quad \frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax;$$

$$(A.67) \quad \frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax;$$

$$(A.68) \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} ax) = \frac{a}{\cos^2 ax};$$

$$(A.69) \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} ax) = -\frac{a}{\sin^2 ax};$$

$$(A.70) \quad \frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}.$$

$$(A.71) \quad \frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}.$$

Неопределен интеграл

Интегрирането е математическо действие, което е обратно на диференцирането. Да разгледаме например функцията $F(x) = ax^2 + bx$. Нейната производна е функцията

$$(A.72) \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 2ax + b.$$

Това уравнение може да се запише във вида $dF(x) = f(x)dx = (2ax + b)dx$. Когато знаем производната $f(x)$, можем да намерим функцията $F(x)$ чрез действието интегриране, което се записва по следния начин

$$(A.73) \quad \int f(x)dx = F(x) + C,$$

където C е произволна константа. В конкретния случай

$$\int (2ax + b)dx = ax^2 + bx + C.$$

Ще обърнем внимание, че $F(x) = ax^2 + bx$ не е единствената функция, чиято производна е $f(x) = 2ax + b$. Всички функции $F(x) + C$ имат същата производна (защото $dC/dx = 0$). Затова интегралът (A.73) се нарича **неопределен интеграл**.

Таблица на най-простите интеграли

$$(A.75) \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{при } n \neq -1);$$

$$(A.76) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$(A.77) \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$$

$$(A.78) \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C;$$

$$(A.79) \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C;$$

$$(A.80) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C;$$

$$(A.81) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C.$$

Интегриране по части

Ако u и v са функции на x , то

$$(A.82) \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

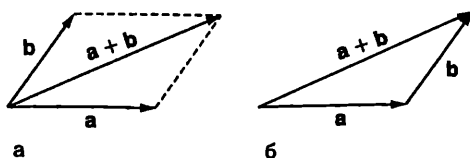
Пример. Пресметнете интеграла $\int xe^{ax} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int xe^{ax} dx &= \int \frac{x}{a} d(e^{ax}) = \frac{x}{a} e^{ax} - \int e^{ax} d\left(\frac{x}{a}\right) = \\ &= \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1). \end{aligned}$$

Вектори

Събиране на вектори. Геометрично сумата от два вектора **a** и **b** се определя по правилото на успоредника (фиг.А-5а) или по аналогично то правило на триъгълника (фиг.А-5б).

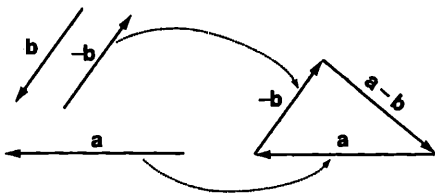


Фиг.А-5. Събиране на два вектора по: а) правилото на успоредника; б) правилото на триъгълника.

$$(A.83) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{комутативен закон}).$$

$$(A.84) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{асоциативен закон}).$$

Изваждане на вектори. Два вектора, които имат еднакви големини, но противоположни посоки, се наричат *противоположни вектори*. Противоположният вектор на $\mathbf{b}$ се означава с $-\mathbf{b}$. Действието изваждане на два векто-



Фиг.А-6. Изваждане на вектори.

ра $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ се свежда до събиране на вектора $\mathbf{a}$ с противоположния на $\mathbf{b}$ вектор $-\mathbf{b}$ (фиг.А-6)

$$(A.85) \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Умножаване на вектори. Нека $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ са единични вектори, насочени съответно по положителните посоки на координатните оси x , y и z на правоъгълна декартова координатна система (фиг.А-7). В сила са следните съотношения

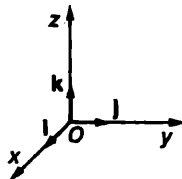
$$(A.86) \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1;$$

$$(A.87) \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0;$$

$$(A.88) \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0;$$

$$(A.89) \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Фиг.А-7. Единични вектори.



Всеки вектор $\mathbf{a}$ може да се представи като сума от три вектора, които са успоредни на координатните оси

$$(A.90) \quad \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

където a_x , a_y и a_z са проекциите на вектора $\mathbf{a}$ съответно върху координатните оси x , y и z . Величините a_x , a_y и a_z се наричат също така (скаларни) компоненти на вектора $\mathbf{a}$ (съответно x -компонента, y -компонента и z -компонента), а векторите $a_x \mathbf{i}$, $a_y \mathbf{j}$ и $a_z \mathbf{k}$ се наричат векторни компоненти.

Скаларното произведение на два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е

$$(A.91) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

където a и b са големините (модулите) на двата вектора, а α е ъгълът между двата вектора.

Векторното произведение на два вектора е

$$(A.92) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + \\ &+ (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

$$(A.93) \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha;$$

$$(A.94) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b});$$

$$(A.95) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c};$$

$$(A.96) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c});$$

$$(A.97) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{d})] \mathbf{c} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \mathbf{d}.$$

В. Международна система единици

Таблица В.1. Основните единици от Международната система (SI – *Système International*) и техните определения.

Величина	Име	Означение	Определение
1. Дължина	метър	m	Дължината на пътя, изминат от светлината във вакуум за интервал от време $\frac{1}{299\,792\,458}$ секунди.
2. Маса	килограм	kg	Маса, равна на масата на международния прототип на килограм.
3. Време	секунда	s	Продължителността на 9 192 631 770 периода налъчението, получено при преход между двете свръхфини нива на основното състояние на атома цезий-133.
4. Електричен ток	ампер	A	Големината на постоянен електричен ток, който при противичане по два успоредни, праволинейни, с безкрайна дължина и с незначително кръгово напречно сечение проводника, поставени на разстояние 1 метър един от друг във вакуум, създава между тези два проводника взаимодействие със сила $2 \cdot 10^{-7}$ нютона на всеки метър от тяхната дължина.
5. Термодинамична температура	келвин	T	$\frac{1}{273,16}$ част от термодинамичната температура на тройната точка на водата.
6. Количество вещество	мол	mol	Количеството вещество на система, съдържаща толкова структурни елемента, колкото атома се съдържат в 0,012 килограма въглерод-12. При използването на мола видът на структурните елементи трябва да бъде определен и може да бъде атоми, молекули, йони, електрони или други частици или определени групировки от тях.
7. Интензитет на светлина	кандела	cd	Интензитет на светлината в дадена посока от източник, излъчващ монохроматично лъчение с честота $540 \cdot 10^{12}$ херца и с интензитет на лъчението в тази посока $\frac{1}{683}$ вата настерадиан.

Таблица В.2. Някои от най-често използваните механични и термодинамични величини и техните измерителни единици от SI.

Величина	Единица	Означение	
Площ	квадратен метър	m^2	
Обем	кубичен метър	m^3	
Плътност	килограм на кубичен метър	kg/m^3	
Скорост	метър в секунда	m/s	
Ускорение	метър в секунда на квадрат	m/s^2	
Ъглова скорост	радиан в секунда	rad/s	
Ъглово ускорение	радиан в секунда на квадрат	rad/s^2	
Честота	херц	Hz	s^{-1}
Сила	нютон	N	$kg \cdot m/s^2$
Импулс	килограм-метър в секунда	$kg \cdot m/s$	
Инерчен момент	килограм-метър на квадрат	$kg \cdot m^2$	
Налягане	паскал	Pa	N/m^2
Работа, енергия, количество топлина	джаул	J	$N \cdot m$
Мощност	ват	W	J/s
Специфичен топлинен капацитет	джаул на килограм-келвин	$J/(kg \cdot K)$	
Вискозитет	паскал-секунда	$Pa \cdot s$	
Повърхностно напрежение	джаул на квадратен метър	J/m^2	N/m
Ентропия	джаул на келвин	J/K	

С. Физични константи и други данни

Таблица С.1. Някои фундаментални физични константи.

Константа	Означение	Стойност
Скорост на светлината във вакуум	c	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Гравитационна константа	γ	$6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(s^2 \cdot kg)$
Универсална газова константа	R	$8,314510 \text{ J/(mol} \cdot K)$
Константа на Авогадро	N_A	$6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Константа на Болцман	k	$1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Константа на Планк	h	$6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot s$
Елементарен електричен заряд	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Маса на електрона	m_e	$9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Маса на протона	m_p	$1,6726231 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Маса на неутрона	m_n	$1,6749286 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Таблица С.2. Някои данни за Слънцето, Земята и Луната

Величина	Единица	Слънце	Земя	Луна
Маса	kg	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$7,36 \cdot 10^{22}$
Среден радиус	m	$6,96 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
Средна плътност	kg/m ³	1410	5520	3340
Ускорение на свободно падане				
на повърхността	m/s ²	274	9,81	1,67
Втора космическа скорост	km/s	618	11,2	2,38

Таблица С3. Множители на десетичните кратни и части от единиците в SI.

Кратни		
Приставка	Означение	Множител
Йота	Y	10^{24}
Зета	Z	10^{21}
Екса	E	10^{18}
Пета	P	10^{15}
Тера	T	10^{12}
Гига	G	10^9
Мега	M	10^6
Кило	k	10^3
Хекто	h	10^2
Дека	da	10^1

Части		
Приставка	Означение	Множител
Деци	d	10^{-1}
Санتي	c	10^{-2}
Мили	m	10^{-3}
Микро	μ	10^{-6}
Нано	n	10^{-9}
Пико	p	10^{-12}
Фемто	f	10^{-15}
Ато	a	10^{-18}
Зепто	z	10^{-21}
Йокто	y	10^{-24}

Гръцка азбука

Алфа	A	α	Йота	I	ι	Ро	P	ρ
Бета	B	β	Капа	K	κ	Сигма	Σ	σ
Гама	Γ	γ	Ламбда	Λ	λ	Тау	T	τ
Делта	Δ	δ	Мю	M	μ	Ипсилон	Υ	υ
Епсилон	E	ε	Ни	N	ν	Фи	Φ	φ
Зета	Z	ζ	Кси	Ξ	ξ	Хи	Χ	χ
Ета	H	η	Омикрон	O	ο	Пси	Ψ	ψ
Тита	Θ	θ	Пи	Π	π	Омега	Ω	ω



Основи на ФИЗИКАТА част I

Автор

Максим Максимов

Редактор

Емилия Христова

Българска. Първо издание

Формат 70x100/16. Печатни коли 15

Издателство

БУЛВЕСТ 2000

1505 София, ул. „Васил Друмев“ 36

тел.: (02) 8061 300, факс: 8061 313

Печат

БУЛВЕСТ – СОФИЯ АД, печатница „Вулкан“